Bemerkungen zur Verallgemeinerung der σ-Umgebung und Hypothesentest

Grundlagen zur σ-Umgebung findet man unter http://mathe-total.de/Stochastik/Binomialverteilung.pdf auf S. 6 (29).

Man kann die σ-Umgebung auch allgemeine verwenden und $[\mu - c \cdot \sigma, \mu + c \cdot \sigma]$ berechnen, wobei das c aus der Tabelle der Normalverteilung (genauer der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung) abgelesen wird. Soll ein Intervall zu einer Sicherheitswahrscheinlichkeit γ berechnet werden, dann kann c über $\Phi(c) = \frac{1+\gamma}{2}$ abgelesen werden.

Wenn z.B. $\gamma = 95\% = 0{,}95$ ist, dann würde man c über die Gleichung

$$\Phi(c) = \frac{1 + 0{,}95}{2} = 0{,}975$$

bestimmen.

Auszug aus der Tabelle der Standardnormalverteilung Φ:

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615

Hier ist dann c $\approx$ 1,96.

(c = 2 wäre die 2σ-Umgebung und hier wäre umgekehrt $\gamma \approx 95{,}5\%$.)

Die Tabelle ist unter mathe-total.de/Stochastik/Tabelle.pdf auf S. 7 (59) zu finden.

Damit ergibt sich über $[\mu - 1{,}96 \cdot \sigma,\ \mu + 1{,}96 \cdot \sigma]$ ein 95%iges (approximatives) Sicherheitsintervall.

Beispiel:
Wenn nun p = 0,2 und n = 100 ist, dann wäre

$$\left[100 \cdot 0{,}2 - 1{,}96 \cdot \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8};\ \ 100 \cdot 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}\right]$$

$= [20 - 1{,}96 \cdot 4;\ 20 + 1{,}96 \cdot 4]$ das 95%ige Intervall, also:

$= [12{,}16; 27{,}84]$

Hier müsste man eigentlich immer die Untergrenze abrunden und die Obergrenze aufrunden, damit die Sicherheit nicht verkleinert wird.

Angenommen, es handelt sich um eine spezielle Therapie, bei der 20% der Personen rückfällig werden und man beobachtet eine Gruppe von 100 Personen, die diese Therapie gemacht haben.

Dann werden mit einer Sicherheit von ca. 95%. 12 bis 28 Personen dieser Gruppe rückfällig.

Man kann mit diesem Intervall sogar einen Test durchführen mit den Hypothesen

$$\begin{array}{ll} H_0: p = 0{,}2 & \{12, 13, \ldots, 28\} \\ H_1: p \neq 0{,}2 & \{0, \ldots, 11\} \cup \{29, \ldots, 100\} \end{array}$$

Der Annahmebereich von H_0 wäre bei einen Signifikanzniveau von ca. 5% (95% Sicherheit bzw. $\alpha = 1 - \gamma$ gleich) {12, 13, . . ., 28}.

Der Ablehnungsbereich von H_0 wäre dann {0, . . ., 11} U {29, . . ., 100}.

Hier würde man diese Bereiche, da man die Binomialverteilung über die Normalverteilung annähert, nur näherungsweise (approximativ) erhalten. In unserem Fall ist auch die Bedingung $\sigma \geq 3$ erfüllt (nun hier sollte man dieses Intervall so berechnen).

Wenn nun das n relativ groß ist und p in keiner Tabelle zu finden ist, dann kann man diese Berechnung unter der Bedingung $\sigma \geq 3$ durchführen.

Sonst (meist in Grundkursen in Hessen) wird der Test wie unter www.mathe-total.de/Stochastik/Binomialverteilung.pdf (ab S. 10 (36)) beschrieben durchgeführt.

Wenn nun, in unserem Beispiel, 29 Personen rückfällig geworden wären, hätte man H_0 verworfen.

Bei einem 2-Seitigen-Test, wie im Beispiel, mit

$$\begin{array}{l} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{array}$$

wird der Annahmebereich von H_0 wie oben beschrieben berechnet (wobei die Intervalluntergrenze abgerundet und die Obergrenze aufgerundet wird, damit γ nicht verkleinert wird).

Bei einem Signifikanzniveau von α wird dann c über $\Phi\,(c) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ berechnet.

Bei einem einseitigen Test gilt (linksseitiger Test)

$$\begin{array}{ll} H_0: p \geq p_0 & [0, \mu - c \cdot \sigma] \\ H_1: p < p_0 & \end{array}$$

Bzw. (beim rechtsseitigen Test)

$$\mathrm{H_0: p \leq p_0} \qquad [\mu + c \cdot \sigma, n]$$
$$\mathrm{H_1: p > p_0}$$

Hier muss aber c über $\Phi\,(c) = 1 - \alpha$ bestimmt werden. Neben H_0 steht oben jeweils der Annahmebereich von H_0 (in Intervallschreibweise).

Weitere Anmerkungen:

1) Im Beispiel erhielt man den Bereich {12, . . ., 28} für die Wahrscheinlichkeit 95%. Würde man hier exakt mit der Binomialverteilung nachrechnen, so würde sich

$$\begin{aligned} P(12 \leq X \leq 28) &= P(X \leq 28) - P(X \leq 11) \\ &\approx 0{,}97998 - 0{,}012575 \\ &\approx 0{,}967405\ ,\ \text{also ca. } 96{,}7\% \end{aligned}$$

über die Tabelle der Binomialverteilung (kumuliert) für n = 100 und p = 0,2 ergeben.

Zum einen ergeben sich in der Regel keine ganzen 95%, da die exakte Verteilung diskret ist und damit springen die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung (z.B. P(X = 11) ≈ 0,006878, P(X = 10) ≈ 0,003363)). Zum wurde im Beispiel nur eine Approximation über die Normalverteilung berechnet. Die Bereiche für den Hypothesentest stimmen aber sogar in unserem Beispiel mit den exakten Werten, d.h. wenn man die Tabelle Binomialverteilung verwendet, überein). Wir verwenden die exakte Verteilung (d.h. die Binomialverteilung) und berechnen nochmal die Bereiche im Beispiel (für den zweiseitigen Test):

Linke Grenze des Ablehnungsbereiches von H_0 Test:

$$\mathrm{P(X \leq k) \leq 0{,}025 = \frac{\alpha}{2}}$$

Maximales k ist hier 11. Diesen Wert kann man mit der Tabelle der Binomialverteilung für n = 100 und p = 0,2 unten ablesen.

Rechte Grenze:

$$\mathrm{P(X \geq k) \leq 0{,}025 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \geq k - 1) \geq 0{,}975}$$

(da $\mathrm{P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)}$)

Hier ergibt ein minimales k von k = 29 (k – 1 = 28).

Damit würde sich derselbe Ablehnungsbereich von H_0 im Beispiel ergeben {0, . . ., 11} U {29, . . ., 100}, wenn man die Binomialverteilung verwendet (und keine Approximation über die Normalverteilung).

k	P(X = k)	P(X ≤ k)
9	0.001478	0.002334
10	0.003363	0.005696
11	0.006878	**0.012575**
12	0.012754	0.025329
…	…	…
27	0.021681	0.965848
28	0.014131	**0.97998**
29	0.008771	0.988751
30	0.00519	0.993941

Tabelle: http://alles-mathe.de/Binomial-Tabelle/Binomialverteilung-Tab.html

2) Möchte man ein Sicherheitsbereich für die %-Werte bzw. Anleite angeben (d.h. für p), so kann an die Grenzen des Sicherheitsintervalles

$$[\mu - c \cdot \sigma,\ \mu + c \cdot \sigma]$$

durch n dividieren:

$$\left[\frac{\mu}{n} - \frac{c \cdot \sigma}{n}, \quad \frac{\mu}{n} + \frac{c \cdot \sigma}{n}\right]$$