Zusammenfassung zu Hypothesentests

Fall 1:
Es wird behauptet, dass die Partei ABC von mindestens 20% gewählt wird.
Vermutung: Es sind weniger.
Dazu werden n = 100 Personen befragt.

$H_0 : p \geq 0{,}20$ Annahmebereich H_0 : {k+1, . . ., n}
$H_1 : p < 0{,}20$ Annahmebereich H_1 : {0, 1, . . ., k} (Ablehnungsbereich von H_0)

↑ Dies ist ein linksseitiger Test (sieht man am Annahmebereich von H_1)

Hier gibt es zwei Aufgabentypen.

1. Annahmebereich von H_1 ist gegeben und α ist gesucht
2. α ist gegeben und der Annahmeb. von H_1 gesucht.

Es folgen zwei Beispiele zu jedem dieser Aufgabentypen.

Beispiel 1-1:
Wenn die Partei ABC von höchstens 16 gewählt wird, wird H_1 angenommen (k = 16). Wie groß ist in diesem Fall der Fehler 1. Art?

$\alpha = P(X \leq 16) \approx 0{,}1923$, also beträgt der Fehler 1. Art ca. 19,23%. Der Wert für $P(X \leq 16)$ kann einer Tabelle zur Binomialverteilung für n = 100 und p = 20 entnommen werden (siehe z.B. http://mathe-total.de/Stochastik/Tabellen.pdf).

Beispiel 1-2:
α soll max. 5% betragen. Wie lautet der Ablehnungsbereich von H_0.
Man wählt das maximale k aus der Tabelle der Binomialverteilung (kumuliertet) mit n = 100 und p = 0,2, so dass

$$P(X \leq k) \leq \alpha = 0{,}05$$

gilt.

$\Rightarrow k = 13$ (aus Tabelle)

Tabelle:

k	P(X≤k)
13	0,0469
14	0,0804

Bemerkung: *Es könnten auch größere Stichprobenumfänge n gegeben sein, aber auch Werte für p, welche man in keiner Tabelle findet (oft in Leistungskursen). Wenn k klein ist, kann man auch*

$$\sum_{x=0}^{k} n\boxed{nCr}x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

in den Taschenrechner eingeben.

Oder man verwendet die Normalverteilung (näherungsweise), denn für $n \cdot p \cdot (1-p) \geq 9$ *gilt:*

$$P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - n \cdot p + 0{,}5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$$

Im Beispiel 1 gilt:

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}2 = 20$
$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 16 > 9$
$\sigma = 4$

$$P(X \leq 16) \approx \Phi\left(\frac{16 - 20 + 0{,}5}{4}\right) \approx \Phi(-0{,}875) \approx 0{,}1908$$

Oft gibt es nur Tabellen für $\Phi(x)$ mit $x \geq 0$. ➔ Man muss $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$ anwenden, also $\Phi(-0{,}875) = 1 - \Phi(0{,}875)$

Im Beispiel 1-2 muss man

$$\Phi\left(\frac{k - 20 + 0{,}5}{4}\right) \leq 0{,}05$$

nach k auflösen, bzw.:

$$\frac{k - 19{,}5}{4} \leq \Phi^{-1}(0{,}05)$$

Wenn man nur eine Tabelle für $x \geq 0$ bzw. $\Phi(x) \geq 0{,}5$ hat, dann muss man statt $\Phi^{-1}(0{,}05) = -\Phi^{-1}(0{,}95)$ $\left(allgemein: \Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1-\alpha)\right)$ *ablesen.*

$$\frac{k - 19{,}5}{4} \leq -1{,}6449 \quad |\cdot 4$$

$$k - 19{,}5 \leq -1{,}6449 \cdot 4 \quad |+19{,}5$$

$$k \leq 19{,}5 - 1{,}6449 \cdot 4 \approx 12{,}92$$

(allgemein: $k \leq \mu - 0{,}5 + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha) = \mu - 0{,}5 - \sigma \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha)$)

Fall 2:

Wie Beispiel des Falles 1, nur man vermutet, die Partei ABC wird von mehr als 20% gewählt.

$H_0: p = 0{,}20 \qquad \{0, \dots, k-1\}$
$H_1: p > 0{,}20 \qquad \{k, \dots, n\}$

↑ Dies ist ein rechtsseitiger Test (siehe Annahmebereich von H_1).

In den Beispielen sei n wieder gleich 100 (es wurden 100 Personen befragt).

Beispiel 2-1:
Wenn die Partei ABC von mindestens 25 Personen gewählt wird, wird H_1 angenommen:

$$\Rightarrow \alpha = P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \overset{(1)}{\approx} 1 - 0{,}8686 \approx 0{,}1314$$

(1) aus der Tabelle der Binomialverteilung (kumuliert) für n = 100; p = 0,2 .

Also ergibt sich ca. 13,14% für den Fehler 1. Art.

Beispiel 2-2:
$\alpha = 5\%$, Annahmebereich H_1 bzw. Ablehnungsbereich H_0 gesucht.

$P(X \geq k) \leq \alpha$

$1 - P(X \leq k-1) \leq \alpha \qquad |-1 + P(X \leq k-1)$

$1 - \alpha \leq P(X \leq k-1)$

Für α = 5%, lesen wir das kleinste k-1 aus der Tabelle ab (n = 100, p = 0,2), für welches $P(X \leq k-1) \geq 0{,}95$ gilt,

k	P(X≤k)
26	0,9442
27	0,9658

also $k - 1 = 27 \Rightarrow k = 28$.

(Denn $P(X \geq 28) = 1 - P(X \leq 27) \leq 0{,}05$ da $P(X \leq 27) \geq 0{,}95$ ist.)

Bemerkung zur Näherung über die Normalverteilung:
Unten ist zu sehen, wie man bei einer Näherung über die Normalverteilung vorgeht.

Im Beispiel 2-1:

$$\alpha = P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{24 - 20 + 0{,}5}{4}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi(1{,}125)$$

$$\approx 1 - 0{,}8697$$

$$\approx 0{,}1303$$

Je nachdem, wie genau die Tabelle ist, muss man vorher runden, z.B.:

$$\Phi(1{,}125) \approx \Phi(1{,}13) \approx 0{,}8708$$

Im Beispiel 2-2:

$$P(X \geq k) \geq \alpha$$

$$1 - P(X \leq k - 1) \leq \alpha$$

$$P(X \leq k - 1) \geq 1 - \alpha$$

$$P(X \leq k - 1) \geq 0{,}95$$

$$\Phi\left(\frac{k - 1 - 20 + 0{,}5}{4}\right) \geq 0{,}95 \quad \left|\Phi^{-1}\right.$$

$$\frac{k - 20{,}5}{4} \geq \Phi^{-1}(0{,}95)$$

$$k \geq 20{,}5 + 4 \cdot \Phi^{-1}(0{,}95) \approx 20{,}5 + 4 \cdot 1{,}6449 \approx 27{,}08$$

(allgemein: $k \geq \mu + 1 - 0{,}5 + \sigma \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha)$*)*

Fall 3:

Hier vermutet man, es könne im Beispiel aus Fall 1 ein verändertes Wahlverhalten geben, ohne dass man eine Richtung ahnt:

$H_0: p = 0{,}2 \qquad \{k_u + 1, \ldots, k_o - 1\}$

$H_1: p \neq 0{,}2 \qquad \{0, \ldots, k_u\} \cup \{k_o, \ldots, n\}$

↑ **Dies ist ein zweiseitiger Test.**

Wenn, wie im Beispiel von Typ 1 k_u und k_o gegeben ist, z.B. wenn man bei höchstens 14 und mindestens 26 Wählerinnen/Wähler unter 100 H_1 annimmt, dann wäre

$\alpha = P(X \leq 14) + P(X \geq 26)$

$= P(X \leq 14) + 1 - P(X \leq 25)$

$\approx 0{,}1679$

Also beträgt der Fehler 1. Art bei dieser Entscheidungsregel ca. 16,79%.

Wenn α gegeben ist, muss man wie im Fall 1 das größte k_u mit $P(X \leq k_u) \leq \frac{\alpha}{2}$ bestimmen und wie im Fall 2 das kleinste k_0 mit $P(X \leq k_o - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Man führt also praktisch je einen einseitigen Test mit $\frac{\alpha}{2}$ durch (den rechts und den linksseitigen Test).