Grundlagen zu Mengen, die man für die Stochastik benötigt

Mengen werden mit großen Buchstaben gekennzeichnet und alle Elemente einer Menge können in einer geschweiften Klammer aufgelistet werden, z.B.:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

Die Menge A enthält 3 Elemente, dies sind die Zahlen 1, 2 und 3. Ein Element einer Menge wird in der Regel mit kleinen Buchstaben bezeichnet, z.B. $x = 1$.

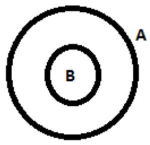
$|A|$ = Anzahl Elemente von A (man sagt auch Mächtigkeit von A).

Es wäre $|A| = 3$.

1 ist ein Element der Menge, was man mit $1 \in A$ symbolisieren kann. Außerdem gilt: $0 \notin A$

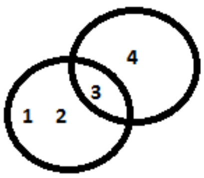
Also: 0 ist kein Element der Menge A.

B = {1, 2} wäre eine Teilmenge von A, denn alle Elemente von B liegen auch in A. Man schreibt hierfür: $B \subset A$



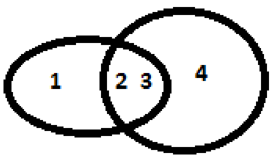
Man kann auch $D \subseteq A$ schreiben, wenn die Mengen D und A auch gleich sein könnten. Es gilt damit $A \subseteq A$.

$\cup$ ist das Symbol für die Vereinigung zweier Mengen: $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$



Dabei werden doppelte Elemente bzw. Elemente, die in beiden Mengen vorkommen, nur einmal aufgeführt.

$\cap$ ist der Schnitt zweier Mengen, d. h. die Elemente, die in beiden Mengen vorkommen:
Mit A = {1, 2, 3} und C = {2, 3, 4} wäre $A \cap C = \{2, 3\}$.



Der Schnitt kann auch leer sein.

Die leere Menge wird mit ϕ oder {} bezeichnet. Z.B. gilt:
{1, 2, 3} ∩ {4, 5} = {}

A\B wäre die Differenz aus A und B, d. h. die Elemente, die in A liegen ohne die aus B, z.B. ist {1, 2, 3} \ {1, 2} = {3}.

$\overline{\mathrm{A}}$ ist das Komplement von A. Dazu muss aber eine Grundmenge G geben sein, in der A liegt (z.B. Ω oder S in der Wahrscheinlichkeitsrechnung).

Damit ist $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{G} \backslash \mathrm{A}$.

Beispiel:
G= {1, 2, 3, 4, 5, 6} und A = {1, 2, 3}
$\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{G} \backslash \mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \backslash \{1, 2, 3\} = \{4, 5, 6\}$

Es gilt $\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{G}$

Wenn X ∩ Y= {} gilt, dann nennt man auch die Mengen X und Y disjunkt. X ∪ Y ist dann eine disjunkte Vereinigung, was man mit einem Punkt über dem Symbol ∪ kennzeichnen kann. Hier gilt:

$$\left|\mathrm{X} \,\dot{\cup}\, \mathrm{Y}\right| = |\mathrm{X}| + |\mathrm{Y}|.$$

Allgemein wäre $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}|$. Es sei z.B. A = {1, 2, 3} und B = {1, 4}:

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}$
$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = 4$
$|\mathrm{A}| = 3$
$|\mathrm{B}| = 2$

$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}|$ bzw. im Beispiel 4 = 3 + 2 – 1.

Eine Menge kann auch alle möglichen Elemente enthalten. Z.B. kann eine Menge auch aus Mengen bestehen, wie z.B. die sogenannte Potenzmenge einer Menge, die alle Teilmengen einer Menge enthält. Z.B. wäre die Potenzmenge von A = {1, 2, 3} gleich:

$\mathcal{P}$(A) = {{}, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

Wie man sieht, enthält die Potenzmenge auch die leere Menge {} und die komplette Menge {1, 2, 3}.

Eine Menge kann auch Punkte oder allgemein Tupel enthalten, beispielsweise bei M = {(1, 1), (1, 2), (1, 3)}. (1, 1) könnte das Ergebnis beim zweimaligen Würfeln darstellen, wenn man zweimal eine 1 wirft.

Bemerkung:
Es gibt auch eine Reihe spezieller Zahlenmengen, wie z.B. die natürlichen Zahlen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

Oft werden die natürlichen Zahlen ohne die 0 definiert, obwohl die DIN-Norm 5473 die Null mit einbezieht. Man kann aber auch, wenn man die natürlichen Zahlen wie oben festlegt, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ für die natürlichen Zahlen einschließlich der Null schreiben.

Die nächste größere Zahlenmenge ist die der ganzen Zahlen:

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Diese Menge enthält auch, wie $\mathbb{N}$, abzählbar unendlich viele Zahlen. Dies gilt aber auch noch für die Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}$

In $\mathbb{Q}$ liegen alle ganzen Zahlen und aber auch allgemein alle Zahlen, die man als Bruch schreiben kann. Z.B. liegt 0,5 in $\mathbb{Q}$, aber auch -1/3. Also alle Zahlen, die keine Nachkomastelle haben, endlich viele Nachkommastellen haben oder periodische Zahlen, wie 1/9 oder 2/3, liegen in $\mathbb{Q}$. Man könnte $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}\}$ schreiben. Der senkreche Strich bedeutet „für die gilt“. Also alle Zahlen a/b mit einer ganzen Zahl a und einer natürlichen Zahl b.

Dann gibt es noch die irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$, was alle Zahlen sind, die unendlich viele Nachkommastellen haben, aber nicht periodisch sind. Z.B. hat 1/3 = 0,333333… unendlich viele Nachkommastellen, aber eine Periode und liegt damit nicht in $\mathbb{I}$. Nicht aber die Zahl π. Diese hat unendlich viele Nachkommastellen, aber keine Periode und liegt somit in $\mathbb{I}$. D.h., selbst wenn man 1000 Stellen von π kennt, weiß man nicht die nächste 1001-te Stelle.

π = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164
0628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535 9
40812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344
61284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602
49141273724587006606315588174881520920962829254091715364367892590360011330
53054882046652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179
31051185480744623799627495673518857527248912279381830119491298336733624406
56643086021394946395224737190702179860943702770539217176293176752384674818
46766940513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122
49534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136
29774771309960518707211349999998372978049951059731732816096318595024459455
34690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142
06171776691473035982534904287554687311595628638823537875937519577818577805
32171226806613001927876611195909216420198…

Die irrationalen Zahlen sind überabzählbar unendlich viele.

Weitere irrationale Zahlen wären die Wurzel aus 2, d.h. $\sqrt{2}$ oder - $\sqrt{3}$. Oder die eulersche Zahl e.

Vereinigt man die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$, dann erhält man die reellen Zahlen, d.h. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Benötigt man nur die positiven reellen Zahlen, dann kann man auch $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ schreiben.