Erklärung zur quadratischen Ergänzung

Es werden die beiden binomischen Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

und

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

benötigt.

Beispiel: $(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2$

$= x^2 + 10x + 25$

Man sieht, dass der Faktor vor x auf der rechten Seite (hier 10) das doppelte der Zahl in der Klammer des Binoms (hier 5) ist, denn $(x + a)^2 = x^2 + 2a \cdot x + a^2$. Wenn nur $x^2 + 10x + ?$ bekannt wäre und „?“ gesucht wird, dann könnte man sich folgendes überlegen:

$(x + \square)^2 = x^2 + 10x + \square$

Im linken Kästchen steht die Hälfte von 10 (Faktor vor x), also 5. Hinten steht das Quadrat von 5, also 25.

$\left(x + \boxed{5}\right)^2 = x^2 + 10x + \boxed{25}$

Die 25 ergibt sich über $\left(\frac{10}{2}\right)^2$.

Noch ein **Beispiel.**:

$(x - \square)^2 = x^2 - 6x + \square$

In das linke Kästchen kommt die 3 (6/2) und in das rechte Kästchen die $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$

$\rightarrow \left(x - \boxed{3}\right)^2 = x^2 - 6x + \boxed{9}$

Möchte man nun die Gleichung

$y = x^2 - 12x + 40$

Auf die Scheitelform $y = (x - x_s)^2 + y_s$ bringen, so muss man zunächst den Term oben so ergänzen, dass man die binomische Formel verwenden kann:

$y = x^2 - 12x + 40$

Hier würde $\left(\frac{12}{2}\right)^2 = 6^2 = 36$ fehlen. Nun kann man aber nicht einfach 36 hinzufügen, man muss sie auch subtrahieren, damit nichts verändert wird bzw. der Term äquivalent bleibt.

$y = x^2 - 12x + 36 - 36 + 40$ (hier kann man nun $x^2 - 12x + 36$ mit der binomischen Formel als $(x-6)^2$ schreiben)

$y = (x-6)^2 - 36 + 40$
$y = (x-6)^2 + 4$

Somit haben wir die Scheitelform der Parabelgleichung bestimmt und können den Scheitelpunkt S(6; 4) ablesen.

Es folgt noch ein Beispiel, denn vor x^2 könnte noch ein Faktor (ungleich 1) stehen:

$y = 2x^2 - 20x + 30$

Diesen muss man vorklammern:

$y = 2 \cdot [x^2 - 10x \qquad\qquad] + 30$

Die 30 kann außerhalb der Klammer stehen, oder man schreibt 15(=30/2) in die Klammer.

Beim "Vorklammern" wird alles, was in die Klammer kommt, durch den Faktor geteilt, der vorgeklammert wird. Deshalb steht 10 in der Klammer.

$$y = 2 \cdot \left[x^2 - 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2\right] + 30$$

$$= 2 \cdot [x^2 - 10x + 25 - 25] + 30$$

$$= 2 \cdot [(x-5)^2 - 25] + 30$$

$$= 2 \cdot (x-5)^2 - 50 + 30$$

$$= 2 \cdot (x-5)^2 - 20$$

Scheitelpunkt ist hier S(5; -20).

Manche Lehrerinnen oder Lehrer dividieren auch die Gleichung durch den Faktor von x^2

$y = 2x^2 - 20x + 30 \quad |:2$

$\frac{y}{2} = x^2 - 10x + 15$ (entspricht auch dem Inneren der Klammer, wenn man 2 vorklammert, denn $2x^2 - 20x + 30 = 2[x^2 - 10x + 15]$)

$\frac{y}{2} = x^2 - 10x + 25 - 25 + 15$

$\frac{y}{2} = (x-5)^2 - 10 \quad |\cdot 2$

$y = 2 \cdot (x-5)^2 - 20$

Noch ein **Beispiel** mit einem Bruch:

$y = {}^1/_5 \cdot x^2 + {}^1/_5 \cdot x + 4$

$= {}^1/_5 \cdot [x^2 + x] + 4$ Tipp: Beim Vorklammern eines Bruches wird alles, was in die Klammer kommt, mit dem Kehrwert (also hier 5/1 = 5) multipliziert.

$= {}^1/_5 \cdot \left[x^2 + x + \left({}^1/_2\right)^2 - \left({}^1/_2\right)^2\right] + 4$

$= {}^1/_5 \cdot \left[\left(x + {}^1/_2\right)^2 - {}^1/_4\right] + 4$

$= {}^1/_5 \cdot \left(x + {}^1/_2\right)^2 - {}^1/_{20} + 4$

$= {}^1/_5 \cdot \left(x + {}^1/_2\right)^2 + \frac{79}{20} \Rightarrow S\left(-\frac{1}{2}; \frac{79}{20}\right)$

Bemerkung: Bei $y = 2x^2 + 10$ braucht man keine quadratische Ergänzung, der Scheitelpunkt liegt bei S(0; 10) (hier fehlt der „Term mit dem x“).