Anwendungsaufgabe zur Analysis: Gewinnfunktion

Ein Winzer verkauft eine Sorte Wein für 10€ pro Liter. Er hat sich die Kosten für verschiedene Verkaufszahlen notiert:

x	K(x)
0	5
1	6
2	9

Die Einheit von x sind 1000 Litern und die von K(x) sind 1000 Euro.

Er geht von einer quadratischen Kostenfunktion aus.

a) Wie lautet die Kostenfunktion?

b) Bei wie vielen verkauften Litern macht er Gewinn?

c) Wie hoch sind die Fixkosten?

d) Bei welcher Anzahl verkaufter Liter macht er den maximalen Gewinn?

e) Der Graph der Gewinnfunktion wird gesucht (im Bereich [0; 10]).

Lösung

a) Ansatz: $K(x) = ax^2 + bx + c$

$K(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5 \iff \quad c = 5$

$K(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 6 \iff \quad a + b + c = 6$

$K(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9 \iff \quad 4a + 2b + c = 9$

Wir setzen c = 5 in die beiden unteren Gleichungen ein:

$a + b + 5 = 6 \iff \quad a + b = 1 \quad (1)$

$4a + 2b + 5 = 9 \iff \quad 4a + 2b = 4 \quad (2)$

Wir subtrahieren (2) vom Zweifachen von (1)

$2 \cdot (1): \quad 2a + 2b = 2$

$(2) \quad 4a + 2b = 4$

______________________(-)

$-2a = -2$

$a = 1$

In (1) eingesetzt: $1 + b = 1$

$b = 0$

Also ist die Kostenfunktion $K(x) = x^2 + 5$.

b) $G(x) = E(x) - K(x)$ (Gewinn = Erlös bzw. Umsatz minus Kosten)

Für die Erlösfunktion gilt:

$E(x) = 10 \cdot x$ (da pro Liter 10€ verdient wird, bzw. pro 1000 Liter 10.000€.)

$G(x) = 10x - (x^2 + 5) = -x^2 + 10x - 5$

Nun bestimmen wir die Nullstellen der Gewinnfunktion.

$G(x) = -x^2 + 10x - 5 = 0 \quad |:(-1)$

$x^2 - 10x + 5 = 0$

Mit der p-q-Formel ergibt sich:

$x_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25-5}$

$= 5 \pm \sqrt{20}$

$x_1 = 5 + \sqrt{20} \approx 0{,}5279$

$x_2 = 5 - \sqrt{20} \approx 9{,}4721$

D.h. ab 528 Litern verkauften Wein macht er Gewinn bis zu maximal 9472 Litern, wenn er nur ganze Liter verkaufen kann, sonst würde er zwischen ca. 527,9 und ca. 9472,1 Litern einen Gewinn machen, da G(x) > 0 ist für $5 - \sqrt{20} < x < 5 + \sqrt{20}$, was man an G(5) > 0 sieht bzw. daran, dass G eine nach unten geöffnete Parabel darstellt und deswegen zwischen den Nullstellen oberhalb der x-Achse verläuft.

c) Die Fixkosten betragen 5000€, denn $K(0) = 5$.

d) Wir leiten G zweimal ab und setzen dann G'(x) = 0:

$G'(x) = -2x + 10$

$G''(x) = -2$

$G'(x) = -2x + 10 = 0$

Also: $x = 5$

$G''(5) = -2 < 0 => \text{maximal}$

Somit macht er bei 5000 Litern den maximalen Gewinn.
Der maximale Gewinn beträgt dann $G(5) = 20$, also 20.000€.

e)