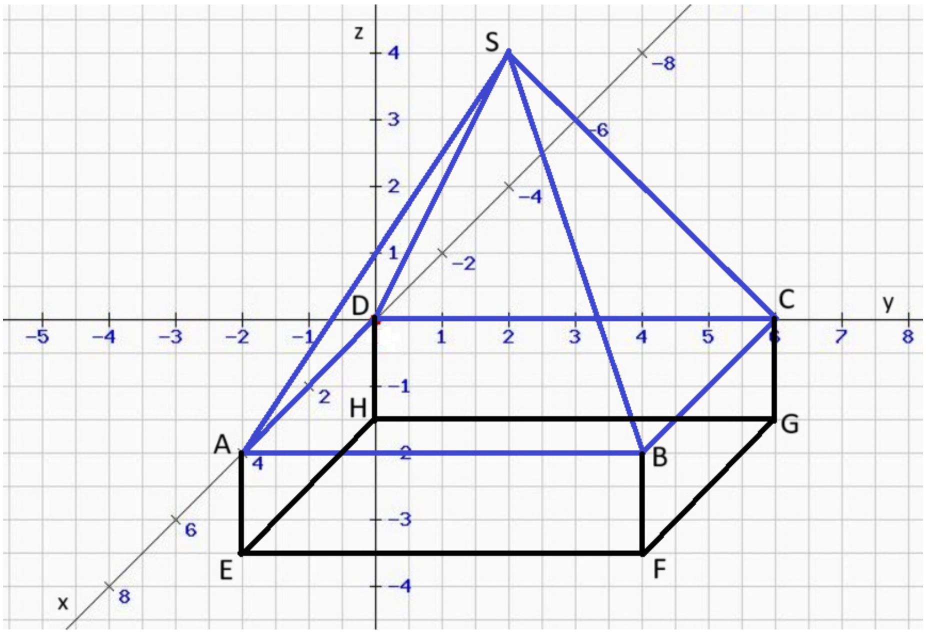
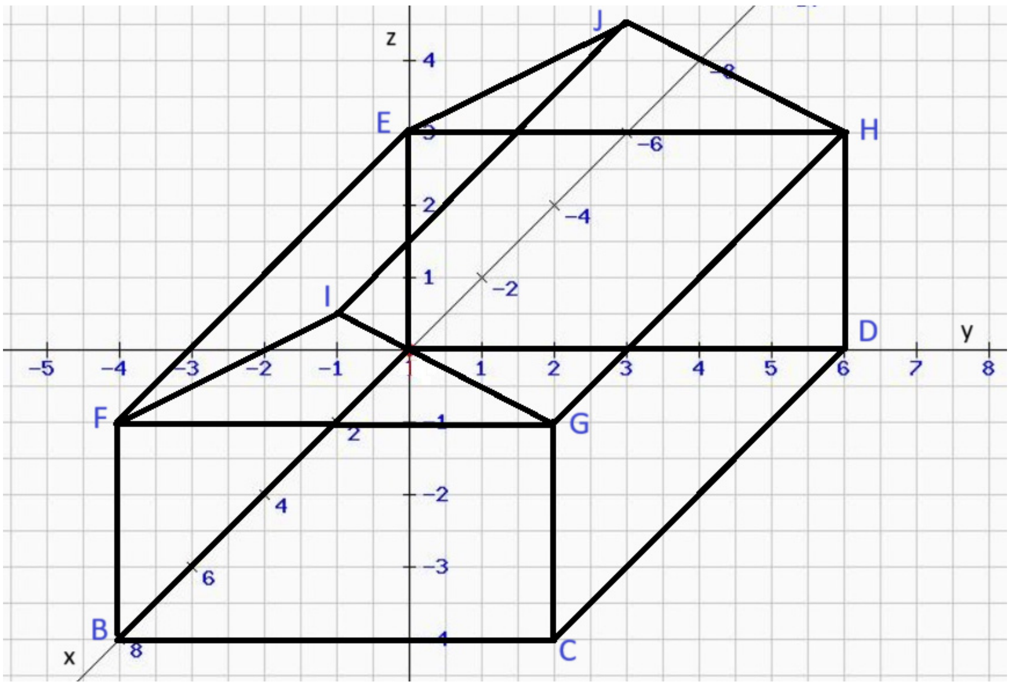
Aufgaben zur Bestimmung von Punkten und Abständen

1) Die unten dargestellt Pyramide hat eine rechteckige Grundfläche (eine Einheit entspricht einem Meter), die in der x-y-Ebene liegt. Sie ist 5m hoch und die Spitze S liegt über der Mitte der Grundfläche ABCD. Sie hat einen 1,5m tiefen Keller und der Kellerboden entspricht dem Rechteck EFGH. a) Wie lauten die Koordinaten der unten eingezeichneten Punkte (A bis H und S)? b) Wie lange ist die Seitenkante von A nach S? c) Wie groß ist die Fläche der Dreiecksseite ABS?

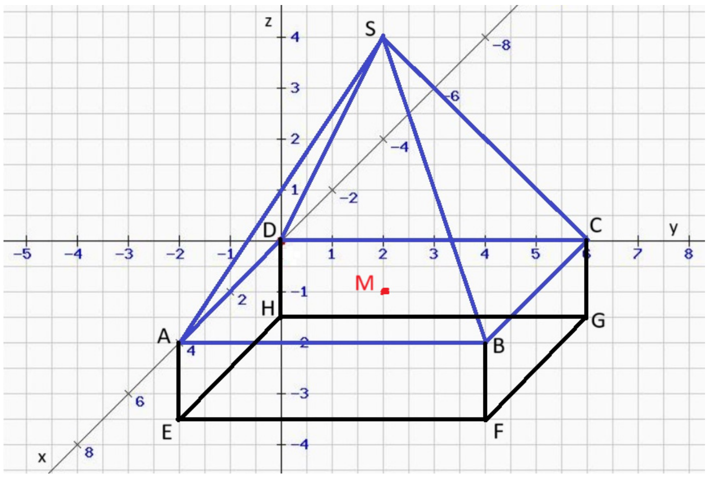


2) Im unten zu sehenden Koordinatensystem wird ein Haus dargestellt (eine Einheit entspricht einem Meter). Es werden die Punkte E, F, G, H, I und J des Daches gesucht, sowie die Länge des Dachsparrens, der die Punkte F und I verbindet. Die Dachspitze I liegt 1,5m über dem Dachboden, der durch das Viereck EFGH festgelegt ist. Der Boden das Hauses ABCD liegt in der x-y-Ebene und der Eckpunkt A wurde im Koordinatenursprung aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet.



Lösung

1) a) Der Punkt D(0|0|0) liegt im Ursprung und die weiteren Eckpunkte der Grundfläche sind A(4|0|0), B(4|6|0) und C(0|6|0). H liegt 1,5m unter D. Damit ist H(0|0|-1,5) und analog erhalten wir die anderen Eckpunkte des Kellers: E(4|0|-1,4), F(4|6|-1,5) und G(0|6|-1,5).
Die Spitze S liegt 5m über dem Mittelpunkt M der Bodenfläche, der auch der Mittelpunkt von D und B ist: $M((d_1+b_1)/2|(d_2+b_2)/2|(d_3+b_3)/2) = M((0+4)/2|(0+6)/2|(0+0)/2) = M(2|3|0)$
Damit erhalten wir den Punkt S, der sich 5m über M befindet: S(2|3|5)



b) Wir berechnen die Länge der Seitenkante als Abstand von A und S bzw. Länge von $\overrightarrow{AS}$:

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

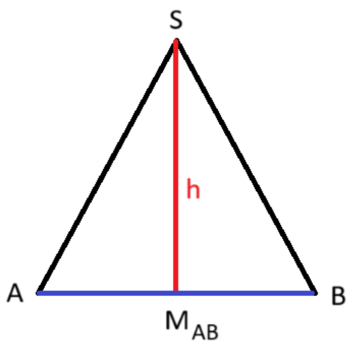
$$|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{38} \approx 6{,}16 \text{ also ca. } 6{,}16\text{m.}$$

$$\text{Es gilt: } |\overrightarrow{AS}| = \sqrt{(s_1 - a_1)^2 + (s_2 - a_2)^2 + (s_3 - a_3)^2}$$

c) Die Fläche A_D des Dreiecks kann schnell mit Kreuzprodukt bestimmt werden, wenn dieses schon behandelt wurde: $A_D = 1/2 \cdot |\overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{AB}|$. So wird das Kreuzprodukt berechnet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Es folgt eine andere Möglichkeit zur Berechnung der Dreiecksfläche:



Wir berechnen die Höhe h der Dreieckseite über den Abstand des Mittelpunktes $M_{AB}(4|3|0)$ (der Punkte A und B) zum Punkt S berechnen, wobei die Grundseite dann die Strecke von A nach B ist (Berechnung ohne Einheiten): h = $\left|\overrightarrow{M_{AB}S}\right| = \sqrt{(2-4)^2+(3-3)^2+(5-0)^2} = \sqrt{29}$

Der Länge der Grundseite (Abstand A und B) beträgt 6 (= g), womit wir die Fläche A_D erhalten:
$A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{29} \approx$ 16,16 womit Seitenfläche ABS ca. 16,16m² beträgt.

2) Wir lesen die Eckpunkte des Bodens ab: A(0|0|0), B(8|0|0), C(8|6|0) und D(0|6|0)
Die Eckpunkte des Dachbodens liegen jeweils 3 Einheiten darüber: E(0|0|3), F(8|0|3), G(8|6|3) und H(0|6|3). Die Dachspitze I liegt 1,5 Einheiten über dem Mittelpunkt M_{FG} der Punkte F und G:

$M_{FG}\left(\frac{f_1+g_1}{2}\middle|\frac{f_2+g_2}{2}\middle|\frac{f_3+g_3}{2}\right) = M_{FG}\left(\frac{8+8}{2}\middle|\frac{0+6}{2}\middle|\frac{3+3}{2}\right) = M_{FG}(8|3|3)$, womit I(8|3|4,5) wäre.

Analog erhalten wir J(0|3|4,5), da dieser Punkt 1,5 Einheiten über dem Mittelpunkt $M_{EH}(0|3|3)$ der Punkte E und H liegt.

Nun berechnen wir noch den Abstand von F und I:

$$\left|\overrightarrow{FI}\right| = \sqrt{(i_1-f_1)^2+(i_2-f_2)^2+(i_3-f_3)^2} = \sqrt{(8-8)^2+(3-0)^2+(4{,}5-3)^2} \approx 3{,}35$$

Also beträgt die Länge ca. 3,35m.