Aufgaben zur Vektorrechnung (Winkel und Skalarprodukt)

1) Welche der folgenden Vektoren sind orthogonal zueinander?

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) Wie muss a gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind?

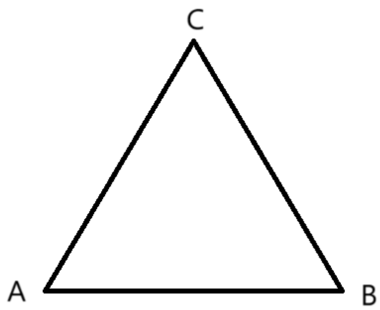
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

3) Gesucht wird der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

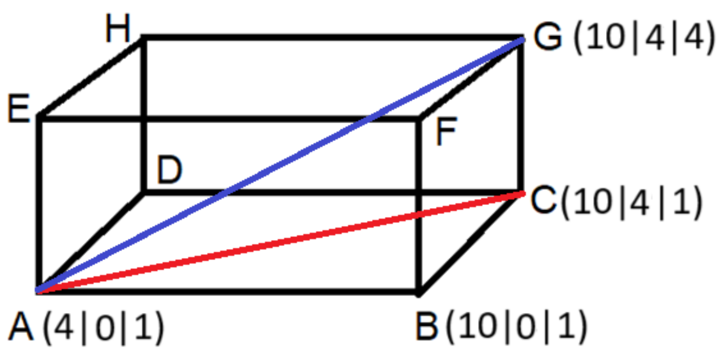
4) Wie muss bei der Aufgabe 2a) der Parameter a gewählt werden, damit der Winkel kleiner als 90° ist?

5) a) Wie groß ist der Winkel α in der Ecke A des Dreiecks mit A(2|2|0), B(8|2|0), C(5|7|1)?



b) Das Dreiecke sieht in der obigen Skizze gleichseitig aus (jede Seite ist gleich lang). Ist dies der Fall und wie groß sind die restlichen Winkel?

6) Im unteren Quader wird der Winkel gesucht, den die Diagonale $\overline{AC}$ mit der Kante $\overline{AB}$ einschließt und der, den die Raumdiagonale $\overline{AG}$ mit der Diagonalen $\overline{AC}$ einschließt.



Lösungen:

1) Welche der folgenden Vektoren sind orthogonal zueinander?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wie prüfen, ob das Skalarprodukt zwischen je zwei Vektoren gleich 0 ist. Theoretisch müssten wir 5 über 2 und damit 10 Möglichkeiten prüfen. Beim Betrachten der Vektoren kann man aber schon bestimmte Möglichkeiten ausschließen, z.B. könnten die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ nicht orthogonal sein.

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal, denn $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ = 1 · (-2) + 4 · 0 + 2 · 1 = 0.

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind nicht orthogonal, denn $\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ = 4 – 8 + 2 = -2 ≠ 0.

Orthogonal sind noch $\vec{b}$ und $\vec{d}$, wie auch $\vec{c}$ und $\vec{e}$.

2) Wie muss a gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Wir müssen die Gleichung $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = 0 nach a auflösen:

$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ = 0 ⇔ 2a – 8 + 2 = 0 ⇔ 2a – 6 = 0. Damit gilt a = 3.

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ = 0 ⇔ -10 + 4a – 6 = 0, was a = 4 ergibt.

3) Gesucht wird der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Wir benötigen:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 - 4 + 2 = 4$, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$

und $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{26}$. Da $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ist, ergibt sich ein Winkel unter 90°.

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4}{3 \cdot \sqrt{26}}$ womit $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{3 \cdot \sqrt{26}}\right) \approx 74{,}84°$

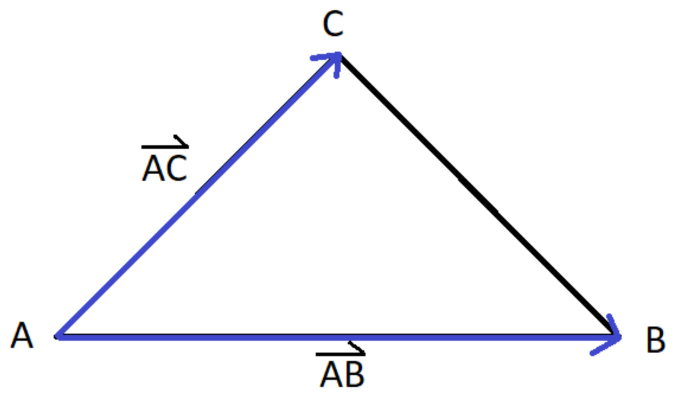
b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und hier ist $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = -4 < 0, womit α > 90° ist.

Wir erhalten: $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}}\right) \approx 139{,}11°$

4) Wie muss bei der Aufgabe 2a) der Parameter a gewählt werden, damit der Winkel kleiner als 90° ist? Hier muss $\vec{a} \cdot \vec{b}$ größer als 0 sein:

$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow$ 2a – 8 + 2 > 0 $\Leftrightarrow$ 2a – 6 > 0, womit a > 3 sein muss. Bei Ungleichungen muss, wenn durch eine negative Zahl dividiert wird, das „>"-Zeichen oder auch das „<"-Zeichen umgedreht werden, was hier aber nicht der Fall war (siehe https://mathe-total.de/new-MS/Ungleichungen-und-Textaufgaben.pdf). Für a < 3 wäre der Winkel über 90°.

5) a) Wie groß ist der Winkel α in der Ecke A des Dreiecks mit A(2|2|0), B(8|2|0), C(5|7|1)?



Oben sehen wir eine Skizze des Dreiecks. Wir gehen von der Ecke A aus und berechnen die Vektoren, die von A aus auf die anderen Eckpunkte B und C zeigen (die Vektoren müssen bei der Winkelberechnung beide von der Ecke weg oder beide zur Ecke hin zeigen):

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Danach verwenden wir:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{36+0+0} = \sqrt{36} = 6$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+25+1} = \sqrt{35}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} = 18$$

Damit ist:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{18}{6\cdot\sqrt{35}}\right) \approx 59{,}53°$$

b) Das Dreiecke sieht in der Skizze gleichseitig aus (jede Seite ist gleich lang). Ist dies der Fall und wie groß sind die restlichen Winkel?

Wir sehen schon, dass das Dreieck nicht gleichseitig sein kann, denn hier müssten alle Seiten gleich lang sein und zwei Seiten sind schon unterschiedlich lang.

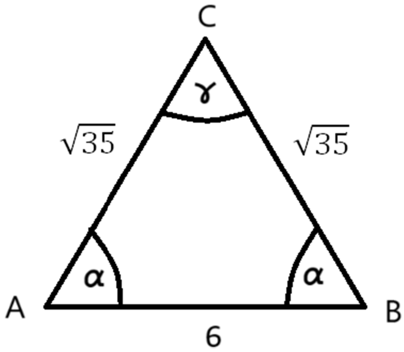
Im Allgemeinen müssten wir nun wie folgt vorgehen: Wir müssten einen weiteren Winkel berechnen und beispielsweise β wählen. Wir kennen schon $\overrightarrow{AB}$ und könnten $\overrightarrow{CB}$ berechnen, damit beide Vektoren auf B zeigen oder wir drehen den Vektor $\overrightarrow{AB}$ mit $\overrightarrow{BA}$ = - $\overrightarrow{AB}$ herum, dann können wir $\overrightarrow{BC}$ berechnen, womit beide Vektoren, über die wir den Winkel berechnen, von B weg zeigen:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}5\\7\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ab hier erkennen wir, dass das Dreieck zwar nicht gleichseitig ist, aber gleichschenklig, denn $\overrightarrow{BC}$ hat die gleiche Länge wie $\overrightarrow{AC}$, beide haben den Betrag $\sqrt{35}$. Damit müssen wir β nicht berechnen.

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+25+1} = \sqrt{35} \quad (\text{und } |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AB}| = 6).$$

Hier gilt $\alpha = \beta$, da die Seiten a (mit der Länge $|\overrightarrow{BC}|$) und b (mit der Länge $|\overrightarrow{AC}|$) die Schenkel sind:



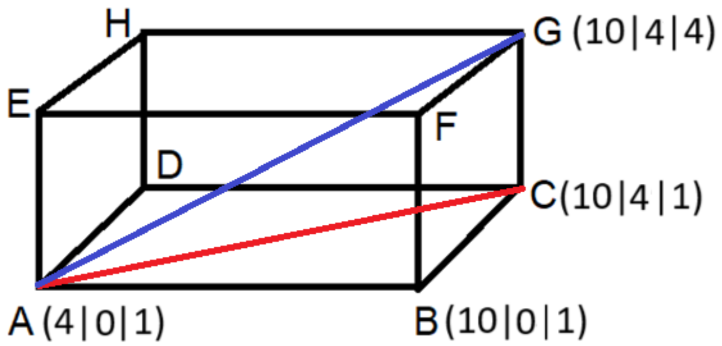
Wenn das Dreieck nicht gleichschenklig wäre, müssten wir β über

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \text{ und somit } \beta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}\right)$$

berechnen. Hier ist aber $\alpha = \beta \approx 59{,}53°$.

Mit $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ergibt sich $\gamma \approx 180° - 2 \cdot 59{,}53° = 60{,}94°$

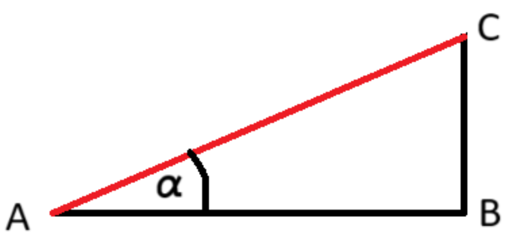
6) Im unteren Quader wird der Winkel gesucht, den die Diagonale $\overline{AC}$ mit der Kante $\overline{AB}$ einschließt und der, den die Raumdiagonale $\overline{AG}$ mit der Diagonalen $\overline{AC}$ einschließt.

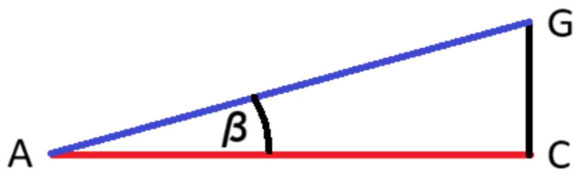


Wir bestimmen erst einmal alle Vektoren, die wie benötigen:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$





Wir berechnen die Winkel: Oben wurde der Winkel, den die Diagonale $\overline{AC}$ mit der Kante $\overline{AB}$ einschließt, mit α bezeichnet und der Winkel, den die Raumdiagonale $\overline{AG}$ mit der Diagonalen $\overline{AC}$ einschließt, mit β.

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{6 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0}{\sqrt{36 + 0 + 0} \cdot \sqrt{36 + 16 + 0}} = \frac{36}{6 \cdot \sqrt{52}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{36}{6 \cdot \sqrt{52}}\right) \approx 33.69°$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AG}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{6 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 0}{\sqrt{36 + 16 + 9} \cdot \sqrt{36 + 16 + 0}} = \frac{52}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{52}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{52}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{52}}\right) \approx 22{,}59°$$

In den obigen Skizzen des Quaders wurde dieser gedreht dargestellt. Beim Einzeichnen in das übliche Koordinatensystem sieht der Quader wie folgt aus: