

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten beim Ziehen mit und ohne Zurücklegen

Ziehen mit Zurücklegen

Im Folgenden versuchen wir den Formalismus relativ gering zu halten und schreiben für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis eintritt, dass eine rote Kugel gezogen wird, einfach $P(\text{rot})$. Wir betrachten folgendes Beispiel: In einer Urne sind 2 rote und 3 blaue Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen jeder einzelnen Kugel ist natürlich, wie in den folgenden Beispielen, gleich („Laplace Experiment“). Beim Ziehen einer Kugel ist die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel

$$P(\text{rot}) = \frac{2}{5},$$

denn von 5 Kugeln sind 2 rot.



Hier wurde – wie beschrieben – angenommen, dass jede Kugel mit derselben Wahrscheinlichkeit auftritt. Die Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel ist dann

$$P(\text{blau}) = \frac{3}{5}.$$

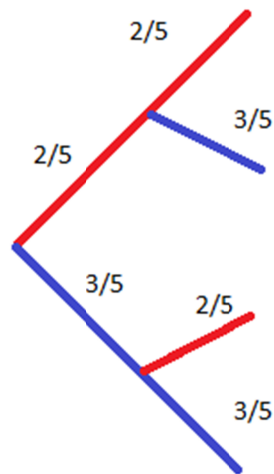
Damit ist die Wahrscheinlichkeit für „rot“ gleich $\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$ und für „blau“ gleich $\frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$. Die Summe über alle Wahrscheinlichkeiten beträgt hier 1 oder 100% (da sich die Ereignisse gegenseitig ausschließen).

Legen wir die gezogene Kugel zurück und ziehen noch einmal, dann ändert sich die Wahrscheinlichkeit im zweiten Zug nicht. D.h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine blaue Kugel im 2. Zug gezogen wird, beträgt wieder $\frac{3}{5}$.

Beim zweimaligen Ziehen gibt es hier insgesamt 4 mögliche Ergebnisse:

- rot, rot
- rot, blau
- blau, rot
- blau, blau

Diese können wir in einem **Baum** darstellen:



Möchten wir nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass 2-mal „rot“ gezogen wird (wir behalten hier die einfache Notation bei und schreiben kurz $P(\text{rot, rot})$ statt $P(\{\{\text{rot, rot}\}\})$), dann können die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für „rot“ beim jeweiligen Ziehen multipliziert werden:

$$\begin{aligned} P(\text{rot, rot}) &= P(\text{rot}) \cdot P(\text{rot}) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0,16 = 16\% \end{aligned}$$

Wir können also die Wahrscheinlichkeit entlang eines Pfades (der Äste) multiplizieren.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel rot und die zweite blau ist, beträgt dann:

$$\begin{aligned} P(\text{rot, blau}) &= P(\text{rot}) \cdot P(\text{blau}) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} = 0,24 = 24\% \end{aligned}$$

Dieselbe Wahrscheinlichkeit erhalten wird natürlich für „blau“ im 1. Zug und „rot“ im 2. Zug:

$$\begin{aligned} P(\text{blau, rot}) &= P(\text{blau}) \cdot P(\text{rot}) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 0,24 = 24\% \end{aligned}$$

Für die letzte Wahrscheinlichkeit, d.h. hierfür (blau blau), bleiben damit noch $100\% - 16\% - 24\% = 36\%$, denn die Summe über die Wahrscheinlichkeiten aller dieser Ereignisse beträgt 100% (bzw. 1). Oder wir berechnen diese wieder über das Produkt:

$$P(\text{blau, blau}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0,36 = 36\%.$$

Damit gilt:

Ereignisse	Wahrscheinlichkeit
rot, rot	0,16
rot, blau	0,24
blau, rot	0,24
blau, blau	0,36

Als nächstes wollen wir die Wahrscheinlichkeit für genau eine rote Kugel bestimmen.

Hier gibt es 2 Möglichkeiten bzw. Pfade im Baumdiagramm: rot, blau oder blau, rot. Damit müssen wir die entsprechenden Wahrscheinlichkeit addieren (+):

$$\begin{aligned} P(\text{genau eine rote Kugel}) &= P(\text{rot, blau}) + P(\text{blau, rot}) \\ &= 0,24 + 0,24 = 0,48 = 48\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für keine rote Kugel beträgt, wie oben berechnet:

$$P(\text{keine rote Kugel}) = P(\text{blau, blau}) = 0,36 = 36\%$$

Hier werden die Wahrscheinlichkeiten in einer Tabelle dargestellt:

Anzahl roter Kugeln	Wahrscheinlichkeit
0	0,36
1	0,48
2	0,16

Nun können wir auch die Wahrscheinlichkeit für höchstens eine rote Kugel bestimmen:

$$\begin{aligned} P(\text{höchstens eine rote Kugel}) &= P(\text{keine rote Kugel}) + P(\text{genau eine rote Kugel}) \\ &= 0,36 + 0,48 = 0,84 = 84\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für höchstens eine rote Kugel ist hier somit $P(\text{blau, blau}) + P(\text{rot, blau}) + P(\text{blau, rot})$, mit (wenn wir die Produkte noch nicht berechnet hätten)

$$P(\text{blau, blau}) = P(\text{blau}) \cdot P(\text{blau}), P(\text{rot, blau}) = P(\text{rot}) \cdot P(\text{blau}) \text{ und } P(\text{blau, rot}) = P(\text{blau}) \cdot P(\text{rot}),$$

wobei auch $P(\text{rot, blau}) = P(\text{blau, rot})$ gilt.

Da die Summe über alle Wahrscheinlichkeiten wieder 1 beträgt, hätten wir die Wahrscheinlichkeit für „höchstens eine rote Kugel“ auch über die Gegenwahrscheinlichkeit berechnen können, d.h. über die Wahrscheinlichkeit für „genau zwei rote Kugeln“ (denn es gibt nur die Möglichkeiten „keine rote Kugel“, „genau eine rote Kugel“ und „genau zwei rote Kugeln“).

$$\begin{aligned} P(\text{höchstens eine rote Kugel}) &= 1 - P(\text{genau zwei rote Kugeln}) \\ &= 1 - 0,16 = 0,84 \end{aligned}$$

Ziehen ohne Zurücklegen

Ziehen wir ohne Zurücklegen, dann ändern sich nach jedem Zug die Wahrscheinlichkeiten, aber die Methode der Berechnung ändert sich nicht. Wir betrachten wieder die Urne mit den 2 roten und 3 blauen Kugeln:



Die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel beim 1. Zug ist wie beim Ziehen mit zunächst $\frac{2}{5}$, so wie auch für „blau“ $\frac{3}{5}$: $P(\text{rot}) = \frac{2}{5}$ und $P(\text{blau}) = \frac{3}{5}$

Haben wir im ersten Zug eine rote Kugel gezogen, dann sind nur noch 4 Kugeln in der Urne, wobei nur noch eine davon rot ist:



Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass im 2. Zug eine rote Kugel gezogen wird:

$$P(\text{„rot“ im 2. Zug, wenn im 1. Zug eine rote Kugel gezogen wurde}) = \frac{1}{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass im 2. Zug eine blaue Kugel gezogen wird, wäre dann:

$$P(\text{„blau“ im 2. Zug, wenn im 1. Zug eine rote Kugel gezogen wurde}) = \frac{3}{4}$$

Hier hängt also die Wahrscheinlichkeit für die Farbe im zweiten Zug davon ab, was im ersten Zug gezogen wurde. Wurde im 1. Zug eine blaue Kugel gezogen, dann sind vor dem 2. Zug noch 2 rote und 2 blaue Kugeln in der Urne:



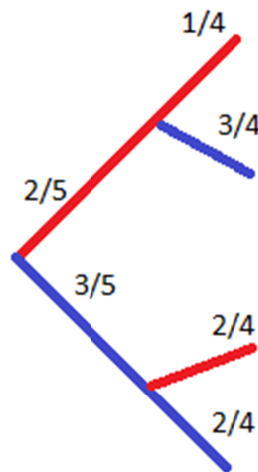
In diesem Fall beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel im 2. Zug:

$$P(\text{„rot“ im 2. Zug, wenn im 1. Zug eine blaue Kugel gezogen wurde}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Und die Wahrscheinlichkeit, für eine blaue Kugel im 2. Zug:

$$P(\text{„blau“ im 2. Zug, wenn im 1. Zug eine blaue Kugel gezogen wurde}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Der **Baum**:



Die Wahrscheinlichkeit für 2 rote Kugeln berechnet sich jetzt wieder wie beim Ziehen mit Zurücklegen (nur eben mit den anderen Wahrscheinlichkeiten ab dem zweiten Zug):

$$\begin{aligned} P(\text{rot, rot}) &= P(\text{„rot“ im 1. Zug}) \cdot P(\text{„rot“ im 2. Zug, wenn im 1. Zug „rot“ gezogen wurde}) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\% \end{aligned}$$

Analog erhalten wir:

$$P(\text{rot, blau}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = 0,3 = 30\%$$

$$P(\text{blau, rot}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0,3 = 30\%$$

$$P(\text{blau, blau}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{10} = 0,3 = 30\%$$

Damit ergibt sich die Tabelle:

Ereignisse	Wahrscheinlichkeit
rot, rot	0,10
rot, blau	0,30
blau, rot	0,30
blau, blau	0,30

Die Wahrscheinlichkeit für genau eine rote Kugel beträgt dann

$$P(\text{genau eine rote Kugel}) = P(\text{rot, blau}) + P(\text{blau, rot}) = 0,3 + 0,3 = 0,6 = 60\%.$$

Die Wahrscheinlichkeit für genau 2 rote Kugeln beträgt dann

$$P(\text{genau 2 rote Kugeln}) = P(\text{rot, rot}) = 0,1 = 10\%$$

und die Wahrscheinlichkeit für keine rote Kugel ist hier:

$$P(\text{keine rote Kugel}) = P(\text{blau, blau}) = 0,3 = 30\%$$

Hier haben wir dann folgende Verteilung:

Anzahl roter Kugeln	Wahrscheinlichkeit
0	0,30
1	0,60
2	0,10