Tipps zu Hypothesentests

Vermutung:
Ein Würfel zeigt zu wenig Sechsen. Wenn bei 100 Würfeln nur 12 oder weniger Sechsen kommen, möchte man sich beschweren. Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man sich zu Unrecht beschwert?

Dahinter steckt ein Test mit den Hypothesen:

H_0: $p = \frac{1}{6}$ Annahmebereich von H_0: {13, ..., 100} (H_0 könnte auch: $p \geq \frac{1}{6}$ lauten)
H_1: $p < \frac{1}{6}$ Annahmebereich von H_1: {0, ..., 12}

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine Person bei dieser Entscheidungsregel beschwert, obwohl der Würfel OK ist: Das wäre die Wahrscheinlichkeit, dass mit einem Würfel, bei dem alles OK ist (also p = 1/6 ist) die Anzahl der Sechsen höchstens 12 beträgt, wenn 100-mal gewürfelt wird. Diese Wahrscheinlichkeit kann in einer Tabelle der kumulierten Binomialverteilung abgelesen werden (mit n = 100 und p = 1/6) oder mit dem Taschenrechner bestimmt werden.

Die Fehlerwahrscheinlichkeit, dass H_0 verworfen wird bzw. H_1 angenommen wird, obwohl H_0 richtig ist, heißt α bzw. Fehlerwahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

α = P(“H_0 wird verworfen, obwohl H_0 richtig ist“) = $P(X \leq 12)) \approx 0{,}1297$

Taschenrechner: $\sum_{x=0}^{12} \binom{100}{x} \cdot (1/6)^x \cdot (5/6)^{100-x}$, wobei für $\binom{100}{x}$ 100 *nCr* x eingeben wird.

Tabelle (n = 100, p = 1/6):

k	P(X ≤ k)
8	0.009532
9	0.021292
10	0.042696
11	0.077719
12	0.129671
13	0.200005
14	0.287421

Wie muss die Entscheidungsregel geändert werden, wenn α (max.) 5% sein soll.

H_1: $p < \frac{1}{6}$ nun ist der Annahmebereich von H_1 unbekannt bzw. die Obergrenze dessen: {0, ..., k}

Nun kann aus der Tabelle der Binomialverteilung mit n = 100 und p = 1/6 das max. k abgelesen werden, so dass noch $P(X \leq k) \leq \alpha = 0{,}05$ gilt $\Rightarrow$ k = 10.

Oder man testet mit verschiedenen k, wann gerade noch $\sum_{x=0}^{k} \binom{100}{x} \cdot (1/6)^x \cdot (5/6)^{100-x} \leq 0{,}05$ gilt (d.h. maximales k suchen, so dass diese Bedingung gilt).

Weiteres **Beispiel**:

100 Personen erhalten ein Medikament. Es sollen in 20% Nebenwirkungen auftreten. Vermutung: Es sind mehr als 20%. Entscheidungsregel: wenn mindestens 25 Nebenwirkungen auftreten wird davon ausgegangen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Nebenwirkung über 20% liegt. Wie groß ist der Fehler α wenn mit dieser Entscheidungsregel H_1 gewählt wird (dass p > 0,20 ist).

H_0: p = 0,2   Annahmebereich von H_0: {0, ..., 24}
H_1: p > 0,2   Annahmebereich von H_1: {25, ..., 100}
↖ *Ab 25 Nebenwirkungen wird H_1 angenommen*

α = P(X ≥ 25) mit p = 0,2
= 1 - P(X ≤ 24) = 1 - F(100; 0,2; 24)   (Symbol für Tabellenwert der kumulierten Binomialverteilung
≈ 1 – 0,8686   mit n = 100, p = 0,2 und k = 24)
≈ 0,1314 = 13,14%

Tabelle (n = 100, p = 0,2):

k	P(X ≤ k)
23	0.810913
24	0.868647
25	0.912525
26	0.944167
27	0.965848
28	0.97998
29	0.988751

Mit Taschenrechner:

$$1 - \sum_{x=0}^{24} \binom{100}{x} \cdot 0{,}2^x \cdot 0{,}8^{100-x}$$

oder

$$\sum_{x=25}^{100} \binom{100}{x} \cdot 0{,}2^x \cdot 0{,}8^{100-x}$$

(wenn es der Taschenrechner schafft)

Wie muss die Regel geändert werden, wenn α = 5% betragen soll?

Annahmebereich H_1: {k, ..., 100}

Hier muss das kleinste k bestimmt werden, so dass $P(X \geq k) \leq \alpha = 0{,}05$ (mit p = 0,2 und n = 100) gilt.

Mit einer Tabelle:
$P(X \geq k) \leq \alpha = 0{,}05$ (müssen wir umstellen da nur Tabelle mit P(X ≤ …) vorhanden ist)
$1 - P(X \leq k-1) \leq 0{,}05 \quad | \ -0{,}05 + P(X \leq k-1)$

$0{,}95 \leq P(X \leq k-1)$

Hier muss nun das kleinste k - 1 in der Tabelle abgelesen werden, so dass die Bedingung erfüllt ist.

$\Rightarrow k - 1 = 27$, also ist $k = 28$

Mit dem Taschenrechner müssten verschiedene k eingesetzt werden und das kleinste k bestimmt werden, so dass noch gilt:

$$\sum_{x=k}^{100} \binom{100}{x} \cdot 0{,}2^x \cdot 0{,}8^{100-x} \leq 0{,}05 = \alpha$$

Oder:

$$\sum_{x=0}^{k-1} \binom{100}{x} \cdot 0{,}2^x \cdot 0{,}8^{100-x} \geq 0{,}95 = 1 - \alpha$$

Damit würde man erst ab 28 Nebenwirkungen behaupten, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Nebenwirkung über 20% liegt und dabei maximal einen Fehler von 5% macht (d.h.in maximal 5% der Fälle könnte die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Nebenwirkung doch nur 20% oder weniger betragen).