Kurvendiskussion mit Polynomen

1) Für die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$ soll eine Kurvendiskussion durchgeführt werden.

Lösung:

Zum Polynom mit der Gleichung $f(x) = x^3-3x^2$:

Symmetrie:

Der Graph der Funktion ist nicht punktsymmetrisch zum Ursprung (und kann auch nicht achsensymmetrisch zur y-Achse sein, da es sich um ein Polynom dritten Grades handelt).

Zu den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen:

Die Nullstellen lauten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 3$ (da $f(x) = x^2 \cdot (x - 3)$).
Es gibt nur zwei verschiedene Nullstellen (eine davon ist doppelt).
Schnittpunkt mit y-Achse ist $S_y(0; 0)$.

Ableitungen:

$f'(x) = 3x^2-6x$
$f''(x) = 6x-6$
$f'''(x) = 6$

Extrema:

Tiefpunkt T(2; -4) und Hochpunkt H(0; 0).

$f'(x) = 0$
$3x^2 - 6x = 0 \mid :3$
$x^2 - 2x = 0$
$x \cdot (x - 2) = 0$
$x_1 = 0; x_2 = 2$

In $f''(x)$ einsetzen:
$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ HP
$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow$ TP

In $f(x)$ einsetzen:
$f(0) = 0 \Rightarrow H(0; 0)$
$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4 = T(2; -4)$

Wendepunkt:

Wendepunkt ist W(1;-2).

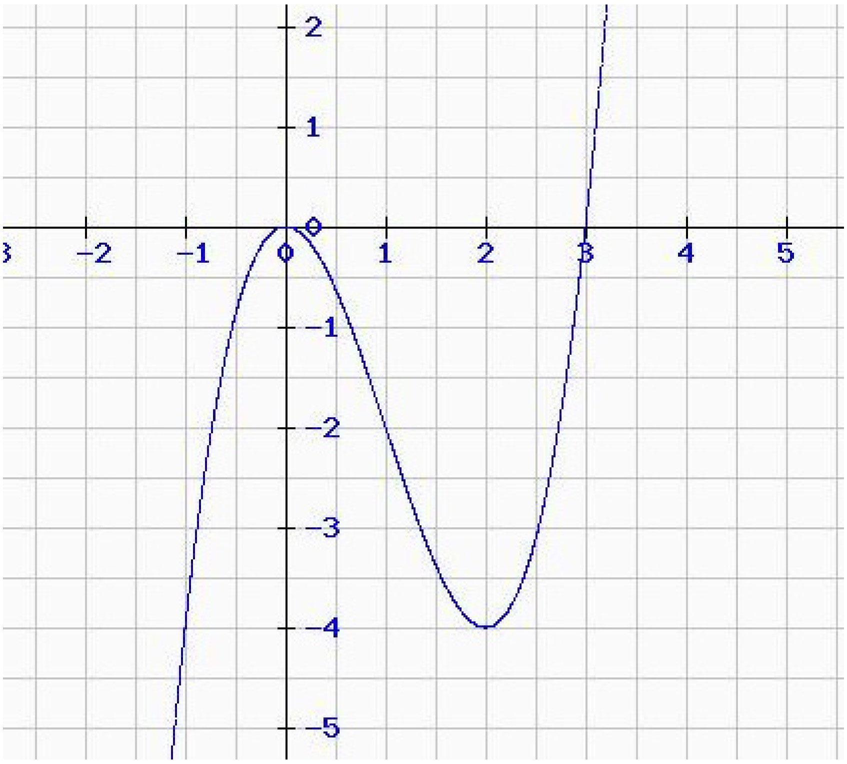
$f''(x) = 0$
$6x - 6 = 0 \mid +6$
$6x = 6 \mid :6$
$x = 1$
In $f'''(x)$ einsetzen: $f'''(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ WP
In $f(x)$ einsetzen: $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2 \Rightarrow W(1;-2)$

Grenzwertverhalten:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (da $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$, denn die größte x-Potenz entscheidet über das Grenzwertverhalten)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (da $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$)

Graph:



2) Für die Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ soll eine Kurvendiskussion durchgeführt werden.

Lösung:

Symmetrie:

Der Graph der Funktion ist nicht punktsymmetrisch zum Ursprung (und kann auch nicht achsensymmetrisch zur y-Achse sein, da es sich um ein Polynom dritten Grades handelt).

Es gilt $f(1) = 0$. $x = 1$ ist eine Nullstelle.

Ergebnis der Polynomdivision $f(x)/(x-1) = -x^2+2x-1$.

Zu den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen:

Es gibt eine (dreifache) Nullstelle $x_{1/2/3} = 1$.
Schnittpunkt mit y-Achse ist $S_y(0;1)$.

Ableitungen:

$f'(x) = -3x^2+6x-3$
$f''(x) = -6x+6$
$f'''(x) = -6$

Extrema:

Es gibt keine Extrema, nur einen Sattelpunkt S(1;0).

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x - 3 = 0 \;|:(-3)$
$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$

Doppelte Nullstelle bei f ' weist auf Sattelpunkt hin.

In f ''(x) einsetzen:

$$f''(1) = -6 + 6 = 0$$

Da f ''(1) = 0, muss x = 1 in f '''(x) eingesetzt werden, um zu prüfen, ob f ''(1) ≠ 0 ist. Dann wäre es ein Sattelpunkt, denn mit f ''(1) = 0 und f '''(1) ≠ 0 wäre x = 1 eine Wendestelle und da auch f '(1) = 0 gilt eine Wendestelle mir waagerechter Tangente, also ein Sattelpunkt.

$f'''(1) = -6 \neq 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt (da $f'(1) = f''(1) = 0$)

Wir benötigen noch den Funktionswert: f(1) = 0, womit S(1; 0) Sattelpunkt ist.

Wendepunkt:

Wendepunkt ist W(1;0).

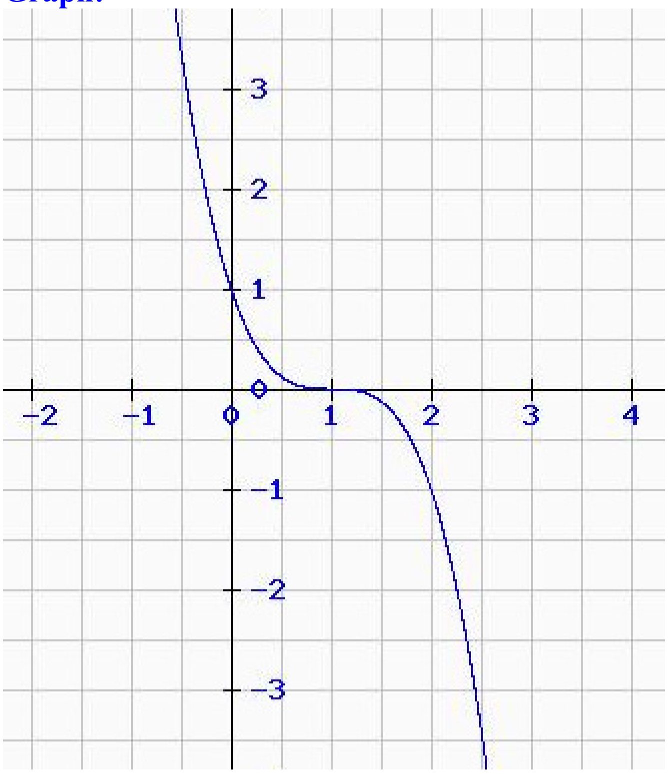
Da f ein Polynom 3.Grades ist und somit nur genau ein Wendepunkt haben kann, ist dies der Sattelpunkt S(1; 0) von oben (oder: f ''(x) = 0 ⇔ -6x + 6 = 0 liefert x = 1, f '''(1) = 6 ≠ 0 und f(1) = 0, womit W(1;0) Wendepunkt ist).

Grenzwertverhalten:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ (da $\lim\limits_{x\to\infty} -x^3 = -\infty$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (da $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = \infty$)

Graph:



3) Für die Funktion $f(x) = 1/4x^4 – 2x^2$ soll eine Kurvendiskussion durchgeführt werden.

Lösung:

Symmetrie:

Der Graph der Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Zu den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen:

Die Nullstellen lauten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{8}$, $x_4 = -\sqrt{8}$ (da $f(x) = 1/4x^2(x^2 - 8)$).
Es gibt nur drei verschiedene Nullstellen (eine davon ist doppelt).
Schnittpunkt mit y-Achse ist $S_y(0;0)$.

Ableitungen:

$f'(x) = x^3-4x$
$f''(x) = 3x^2-4$
$f'''(x) = 6x$

Extrema:

Tiefpunkt: $E_2(-2;-4)$ und $E_3(2;-4)$
Hochpunkt: $E_1(0;0)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad x^3 - 4x = 0$

$x \cdot (x^2 - 4) = 0$

$x_1 = 0; x_{2/3} = \pm 2$

In f ''(x) einsetzen:
$f''(0) = - 4 < 0 \Rightarrow$ HP
$f''(2) = 8 > 0 \Rightarrow$ TP
$f''(-2) = 8 > 0 \Rightarrow$ TP

In f(x) einsetzen:
$f(0) = 0 \Rightarrow E_1(0;0)$
$f(2) = - 4 \Rightarrow E_2(2;-4)$
$f(-2) = -4 \Rightarrow E_3(-2;-4)$

Wendepunkte:

Wendepunkte: $W_1(-2/\sqrt{3};-20/9)$ und $W_2(2/\sqrt{3};-20/9)$

$f''(x) = 0$
$3x^2 - 4 = 0 \mid +4$
$3x^2 = 4 \mid :3$
$x^2 = 4/3 \mid\sqrt{}$

$x_{1/2} = \pm 2/\sqrt{3}$

In f '''(x) einsetzen:

$$f'''(2/\sqrt{3}) = 12/\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow \text{WP}$$
$$f'''(-2/\sqrt{3}) = 12/\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow \text{WP}$$

In f(x) einsetzen:

$$f(2/\sqrt{3}) = -20/3 \Rightarrow W_1(2/\sqrt{3};-20/9)$$

Wegen der Achsensymmetrie von f zur y-Achse ist auch $W_2(2/\sqrt{3};-20/9)$.

Grenzwertverhalten:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1/4 \cdot x^4 = \infty$.

Graph: