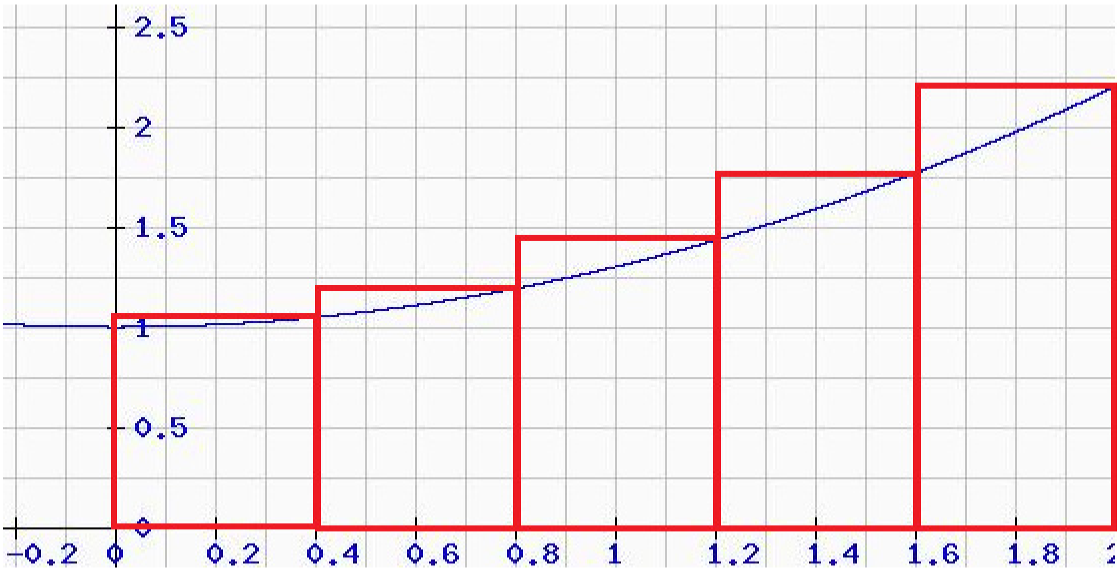
Aufgaben zur Integralrechnung

1) a) Gesucht wird der Wert der Obersumme 0_5, und der die Fläche zwischen den Kurven von $f(x) = 0{,}3x^2 + 1$ und der x – Achse über den Integral von [0; 2] angenähert wird (durch 5 Rechtecke).



b) Wie groß ist die exakte Fläche?

2) Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_0^1 (4x^3 - 6x + 2)dx$

b) $\int_2^4 (10x^4 + 4x^2 + 1)\, dx$

c) $\int_1^2 \frac{4}{x^2} dx$

d) $\int (ax^2 + bx + c)dx$

e) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

3) Wie groß ist die Fläche zwischen

a) der Kurve von $f(x) = 6x^2 + x + 1$ und der x-Achse über dem Integral [1; 2]?

b) der Kurve von $f(x) = x^2 - x$, der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = 2$?

c) der Kurve von $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ und der x-Achse?

Lösung:

1) a) Breit der Rechtecke: h = $\frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

0_5 = 0,4 · f(0,4) + 0,4 · f(0,8) + 0,4 · f(1,2) + 0,4 · f(1,6) + 0,4 · f(2)

= 0,4 · (f(0,4) + f(0,8) + f(1,2) + f(1,6) + f(2))

= $0{,}4 \cdot (0{,}3 \cdot 0{,}4^2 + 1 + 0{,}3 \cdot 0{,}8^2 + 1 + 0{,}3 \cdot 1{,}2^2 + 1 + 0{,}3 \cdot 1{,}6^2 +1 + 0{,}3 \cdot 2^2 +1)$

= 3,056

b) $\int_0^2 (0{,}3\,x^2 + 1)\,dx = [\frac{0{,}3}{3}x^3 + x]_0^2 = [0{,}1x^3 + x]_0^2$

$= 0{,}1 \cdot 2^3 + 2 - 0$

= 2,8

2) a) $\int_0^1 (4x^3 - 6x^2 + 2)\,dx = [x^4 - 2x^3 + 2x]_0^1 = 1 - 2 + 2 - 0 = 1$

b) $\int_2^4 (10x^4 + 4x^2 + 1)dx = = [2x^5 + 4/3 \cdot x^3 + x]_2^4 = 2 \cdot 4^5 + 4/3 \cdot 4^3 + 4 - (2 \cdot 2^5 + 4/3 \cdot 2^3 + 2)$

$= \frac{6182}{3}$

c) $\int_1^2 \frac{4}{x^2}\,dx = \int_1^2 4x^{-2}\,dx = [\frac{4}{-1}x^{-1}]_1^2 = [-4x^{-1}]_1^2 = -4 \cdot 2^{-1} - (-4 \cdot 1^{-1}) = -2 + 4 = 2$

d) $\int (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + d$

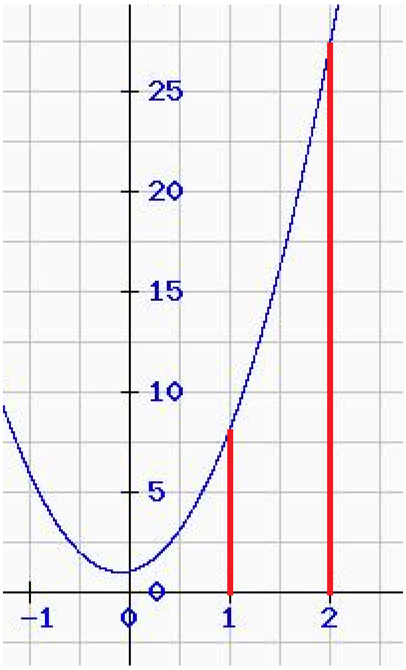
Hier handelt es sich um ein unbestimmtes Integral (d.h. ohne Integrationsgrenzen). Aus diesem Grund wurde eine Integrationskonstante d mit eingefügt.

e) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 \frac{1}{x^{1/2}}dx = \int_1^4 x^{-1/2}dx = [\frac{1}{-1/2+1}x^{-1/2+1}]_1^4$ ($\sqrt{x} = x^{1/2}$ und $1/x^n = x^{-n}$)

$= [2x^{1/2}]_1^4 = 2 \cdot \sqrt{4} - 2 \cdot \sqrt{1} = 2$

Bemerkung: Ist wie bei der Aufgabe 2 ein Integral zu berechnen, dann muss dies dann spielen die Nullstellen des Integranden keine Rolle und der Wert des Integrals kann natürlich auch negativ sein. Sind aber Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse zu bestimmen, dann darf nicht über Nullstellen integriert werden und die Fläche ist auch positive anzugeben.

3) a) $f(x) = 6x^2 + x + 1$ mit I = [1; 2]



Bei diesen Aufgaben muss erst geprüft werden, ob eine Nullstelle im Intervall I liegt. An der Grafik ist dies schon zu sehen. Wenn man diese nicht hätte, müsste man diese Berechnen:

$6x^2 + x + 1 = 0 \quad | : 6$

$x^2 + 1/6x + 1/6 = 0$

$x_{1/2} = -1/12 \pm \sqrt{\frac{1}{144} - \frac{1}{6}}$

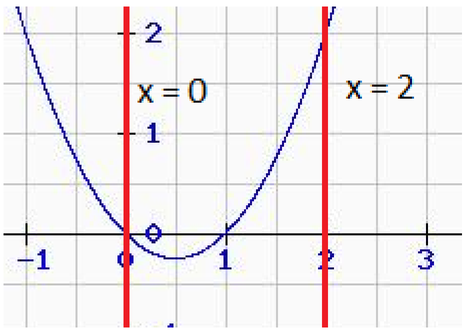
$= -1/12 \pm \sqrt{\frac{-23}{144}}$

Es liegt keine Nulle in I (f hat sogar nicht einmal eine Nullstelle).

$\int_1^2 (6x^2 + x + 1)\,dx = [\,2x^3 + 1/2 \cdot x^2 + x]_1^2 = 2 \cdot 2^3 + 1/2 \cdot 2^2 + 2 - (2 \cdot 1^3 + 1/2 \cdot 1^2 + 1)$

$= \frac{33}{2}$ (FE)

b) $f(x) = x^2 - x$ mit den Grenzen x = 0 und x = 2, also I = [0; 2].



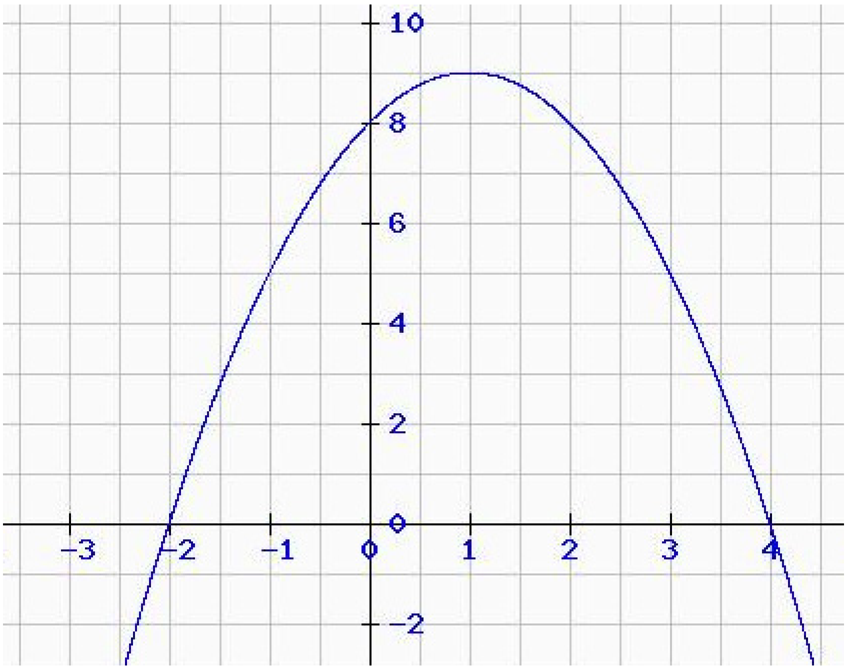
Nullstellen berechnen: $f(x) = x^2 - x = x(x-1) = 0$, womit $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ ist. 1 liegt im Inneren des Integrationsintervalls, womit die Integration nicht über das komplette Intervall durchgeführt werden kann:

$A_1 = \left|\int_0^1 (x^2 - x)\,dx\right| = \left|[\,1/3\cdot x^3 - 1/2\cdot x^2]_0^1\right| = |1/3\cdot 1^3 - 1/2\cdot 1^2 - 0| = |-1/6| = 1/6$ (FE)

$A_2 = \int_1^2 (x^2 - x)\,dx = [\,1/3\cdot x^3 - 1/2\cdot x^2]_1^2 = 1/3\cdot 2^3 - 1/2\cdot 2^2 - (1/3\cdot 1^3 - 1/2\cdot 1^2) = 5/6$ (FE)

$A = A_1 + A_2 = 1/6$ FE $+ 5/6$ FE$= 1$ FE

c) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$. Fläche zwischen Kurve und x-Achse ist gesucht, womit wir erst die Nullstellen bestimmen müssen.



$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$x_{1/2} = 2/2 \pm \sqrt{(-2/2)^2 + 8}$

$= 1 \pm 3$

$x_1 = 4$ und $x_2 = -2$.

$A_2 = \int_{-2}^{4} (-x^2 + 2x + 8)\,dx = [-1/3\cdot x^3 + x^2 + 8x]_{-2}^{4}$

$= -1/3\cdot 4^3 + 4^2 + 8\cdot 4 - (-1/3\cdot(-2)^3 + (-2)^2 + 8\cdot(-2)) = 36$ (FE)