

Extrempunkte berechnen

Gesucht sind die Lage und Arten der Extrempunkt folgender Funktionen:

1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$

3) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 22x - 22$

4) $f(x) = x^3 - 12a^2x$; $a > 0$

Lösung:

$$1) f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$f''(x) = 6x - 18$$

Notwendige Bedingung:

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8}$$

$$= 3 \pm 1$$

$$x_1 = 4; x_2 = 2$$

Liegt ein HP/TP oder ein Sattelpunkt vor ?

In $f''(x)$ einsetzen:

$$f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

Funktionswerte von y -Werte berechnen:

$$f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 14 = 2$$

$$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 14 = 6$$

Also: $E_1(4; 2)$ ist TP und $E_2(2; 6)$ ist HP.

$$2) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$$

$$f'(x) = 2x^3 - 8x$$

$$f''(x) = 6x^2 - 8$$

Notwendige Bedingungen:

$$f'(x) = 0$$

$$2x^3 - 8x = 0 \quad | :2$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{2/3} = \pm 2$$

Die Extrempunkte liegen spiegelsymmetrische zur y -Achse, da f zu dieser symmetrisch ist.

In $f''(x)$ einsetzen:

$$f''(0) = 6 \cdot 0^2 - 8 = -8 < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

$$f''(2) = 6 \cdot 2^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

bei $x_3 = -2$ muss wegen der Symmetrie zur y -Achse durch ein TP vorliegen.

Funktionswerte berechnen:

$$f(0) = 6 \Rightarrow E_1(0; 6) \text{ ist HP}$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 6 = -2 \Rightarrow E_2(2; -2) \text{ ist TP und } E_3(-2; -2) \text{ ist auch ein TP.}$$

$$3) f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 22$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 27$$

$$f''(x) = 6x - 18$$

$$f'''(x) = 6$$

Notwendige Bedingungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 27 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9}$$

$$= 3 \quad (\text{Hinweis auf Sattelpunkt, wenn erste Ableitung doppelte Nullstelle hat})$$

In $f''(x)$ einsetzen:

$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 18 = 0$$

Jetzt muss man in $f'''(x)$ einsetzen:

$$f'''(3) = 6 \neq 0$$

Da $f''(3) = 0$ und $f'''(3) \neq 0$ ist, liegt an der Stelle $x = 3$ ein WP vor. Da auch $f'(3) = 0$ ist (wir hatten oben $f'(x) = 0$ nach x aufgelöst und $x = 3$ als Lösung erhalten), handelt es sich nun um einen Sattelpunkt (= Wendepunkt mit waagerechter Tangente).

Funktionswerte berechnen:

$$f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 27 \cdot 3 - 22 = 5$$

$S(3; 5)$ ist Sattelpunkte.

$$4) f(x) = x^3 - 12a^2x \quad \text{mit } a > 0.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12a^2$$

$$f''(x) = 6x$$

Notwendige Bedingungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12a^2 = 0 \quad | + 12a^2$$

$$3x^2 = 12a^2 \quad | :3$$

$$x^2 = 4a^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{1/2} = \pm 2a$$

In $f''(x)$ einsetzen:

$$f''(2a) = 6 \cdot 2a = 12a > 0, \text{ da } a > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

$$f''(-2a) = 6 \cdot (-2a) = -12a < 0, \text{ da } a > 0 \Rightarrow \text{HP}$$

In $f(x)$ einsetzen:

$$\begin{aligned} f(2a) &= (2a)^3 - 12a^2 \cdot 2a \\ &= 8a^3 - 24a^3 = -16a^3 \end{aligned}$$

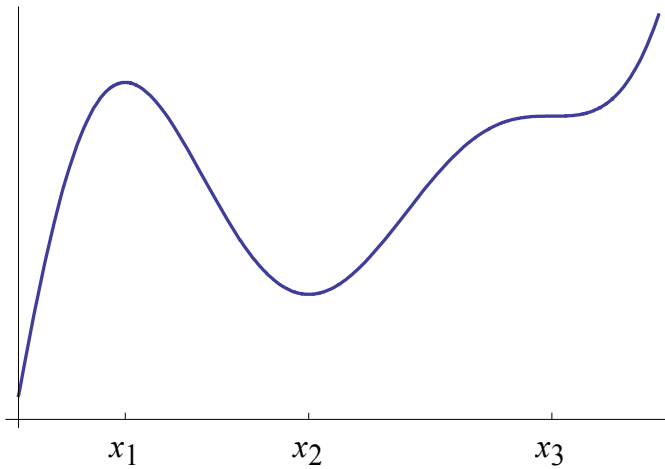
$$f(-2a) = (-2a)^3 - 12a^2 \cdot (-2a) = 16a^3 \quad (\text{klar wegen Punktsymmetrie zum Ursprung})$$

$\Rightarrow E_1(2a; -16a^3)$ ist TP

$E_2(-2a; 16a^3)$ ist HP

Bemerkung:

Die Skizze zeigt eine Funktion mit HP (=Hochpunkt) bei x_1 , TP bei x_2 und Sattelpunkt bei x_3 .



Zu dem obigen Graph passen folgende Bedingungen:

$$f'(x_1) = 0$$

$f''(x_1) < 0$ (da hier ein HP vorliegt)

$$f'(x_2) = 0$$

$f''(x_2) > 0$ (da hier ein TP vorliegt)

$$f'(x_3) = 0$$

$f''(x_3) = 0$ und $f'''(x_3) \neq 0$, bei $x = x_3$ liegt ein Sattelpunkt vor.