

## Extrema bei verschiedenen Varianten von Exponentialfunktionen

Es soll jeweils die Art und Lage der Extrempunkte bestimmt werden:

1)

a)  $f(x) = (x - 2) \cdot e^{-x}$

d)  $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^{-x}$

b)  $f(x) = (2x + 2) \cdot e^{-1/2 \cdot x}$

e)  $f(x) = x \cdot e^{-2x + 1}$

c)  $f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^x$

2)

a)  $f(x) = 2e^x + 4e^{-x}$

c)  $f(x) = e^{-2x} + 4x$

b)  $f(x) = 3e^{2x} - 2e^{-3x}$

3)

a)  $f(x) = e^{-x^2}$

b)  $f(x) = \frac{e^{-x}}{(2 + e^{-x})^2}$  (nur notwendige Bedingung)

## Lösungen:

1) a)  $f(x) = (x - 2) \cdot e^x$

$$\begin{aligned} u(x) &= x - 2 & u'(x) &= 1 \\ v(x) &= e^x & v'(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = 1 \cdot e^x + e^x \cdot (x - 2) = (1 + x - 2) \cdot e^x = (x - 1) \cdot e^x$$

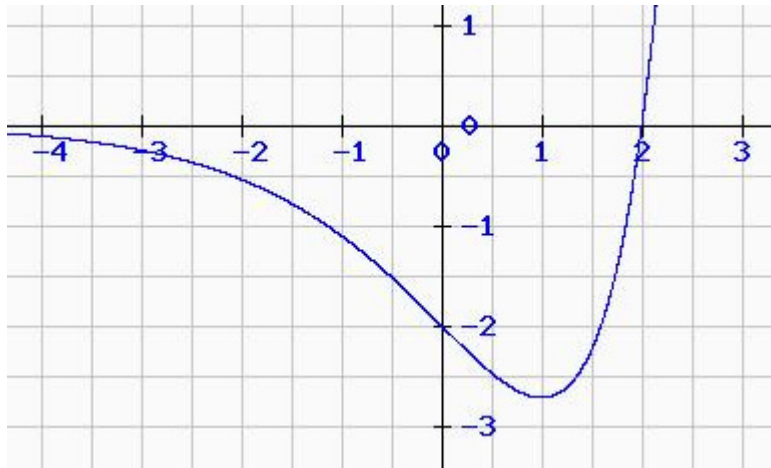
$$\text{Analog: } f''(x) = 1 \cdot e^x + e^x \cdot (x - 1) = (1 + x - 1) \cdot e^x = x \cdot e^x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad (\text{und } e^x = 0, \text{ was aber keine Lösung hat})$$

Damit ist  $x = 1$ .

In  $f''(x)$  einsetzen:  $f''(1) = 1 \cdot e^1 = e > 0$ , also Tiefpunkt.

In  $f(x)$  einsetzen:  $f(1) = (1 - 2) \cdot e^1 = -e \approx -2,72$ . Also ist  $E(1; -e) \approx E(1; -2,72)$  der Tiefpunkt der Funktion.



b)  $f(x) = (2x + 2) \cdot e^{-1/2 \cdot x}$

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x + 2 & u'(x) &= 2 \\ v(x) &= e^{-1/2 \cdot x} & v'(x) &= -1/2 \cdot e^{-1/2 \cdot x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = 2 \cdot e^{-1/2 \cdot x} - 1/2 \cdot e^{-1/2 \cdot x} \cdot (2x + 2) = (2 - 1/2 \cdot (2x + 2)) \cdot e^{-1/2 \cdot x} = (-x + 1) \cdot e^{-1/2 \cdot x}$$

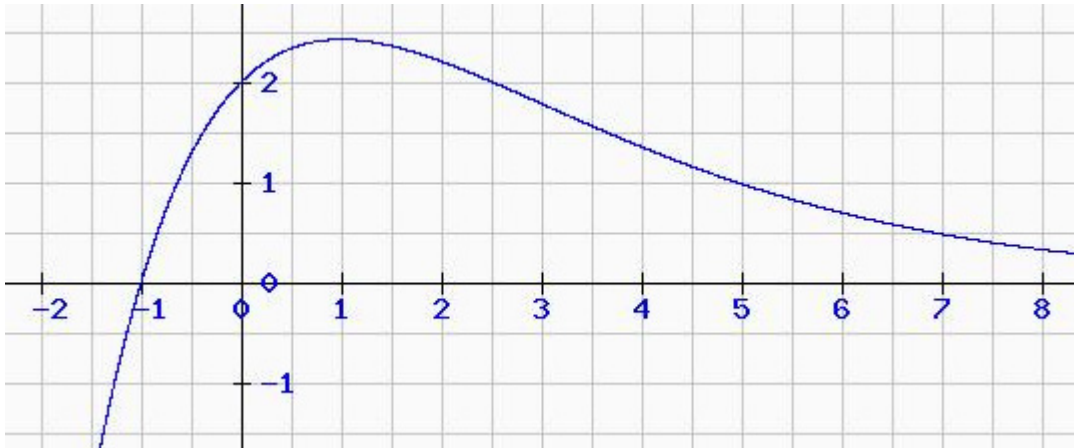
$$\text{Analog: } f''(x) = -1 \cdot e^{-1/2 \cdot x} - 1/2 \cdot e^{-1/2 \cdot x} \cdot (-x + 1) = (-1 - 1/2 \cdot (-x + 1)) \cdot e^{-1/2 \cdot x} = (1/2 \cdot x - 3/2) \cdot e^{-1/2 \cdot x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 1 = 0 \quad (\text{und } e^{-1/2 \cdot x} = 0, \text{ was aber keine Lösung hat})$$

Damit ist  $x = 1$ .

In  $f''(x)$  einsetzen:  $f''(1) = -1 \cdot e^{-1/2} = -e^{-1/2} < 0$ , also Hochpunkt.

In  $f(x)$  einsetzen:  $f(1) = (2 + 2) \cdot e^{-1/2} = 4e^{-1/2} \approx 2,43$ . Also ist  $E(1; 4e^{-1/2}) \approx E(1; 2,43)$  ein Hochpunkt.



c)  $f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^x$

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^2 - 2x + 1 & u'(x) = 2x - 2 \\ v(x) = e^x & v'(x) = e^x \end{array}$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = (2x - 2) \cdot e^x + e^x \cdot (x^2 - 2x + 1) = (2x - 2 + x^2 - 2x + 1) \cdot e^x = (x^2 - 1) \cdot e^x$$

$$\text{Analog: } f''(x) = 2x \cdot e^x + e^x \cdot (x^2 - 1) = (2x + x^2 - 1) \cdot e^x = (x^2 + 2x - 1) \cdot e^x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \quad (\text{und } e^x = 0, \text{ was aber keine Lösung hat})$$

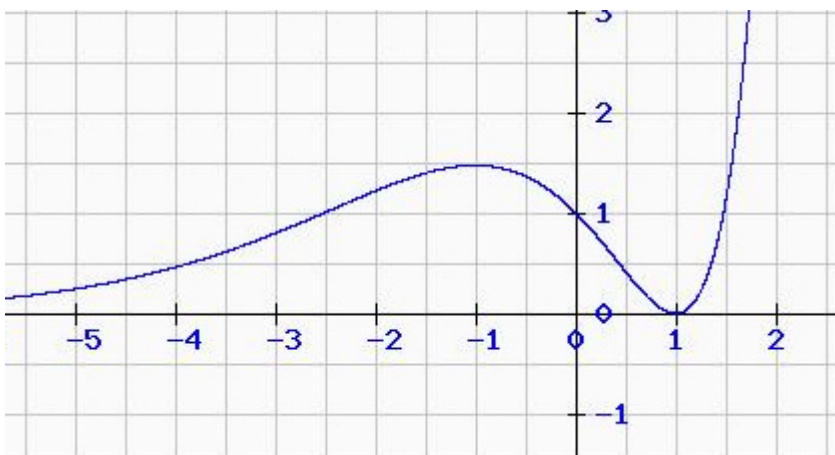
Damit ist  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$ .

In  $f''(x)$  einsetzen:  $f''(1) = 2 \cdot e^1 = 2e > 0$ , also Tiefpunkt.

$$f''(-1) = -2 \cdot e^{-1} < 0, \text{ also Hochpunkt.}$$

In  $f(x)$  einsetzen:  $f(1) = 0 \cdot e^1 = 0$ . Also ist  $E_1(1; 0)$  ein Tiefpunkt.

$$f(-1) = 4 \cdot e^{-1} \approx 1,47. \text{ Also ist } E_2(-1; 4 \cdot e^{-1}) \approx E_2(-1; 1,47) \text{ ein Hochpunkt.}$$



d)  $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^{-x}$

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^2 - 3 & u'(x) = 2x \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{array}$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = 2x \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot (x^2 - 3) = (2x - (x^2 - 3)) \cdot e^{-x} = (-x^2 + 2x + 3) \cdot e^{-x}$$

$$\text{Analog: } f''(x) = (-2x + 2) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot (-x^2 + 2x + 3) = (-2x + 2 - (-x^2 + 2x + 3)) \cdot e^{-x} = (x^2 - 4x - 1) \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \quad (\text{und } e^x = 0, \text{ was aber keine Lösung hat}) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

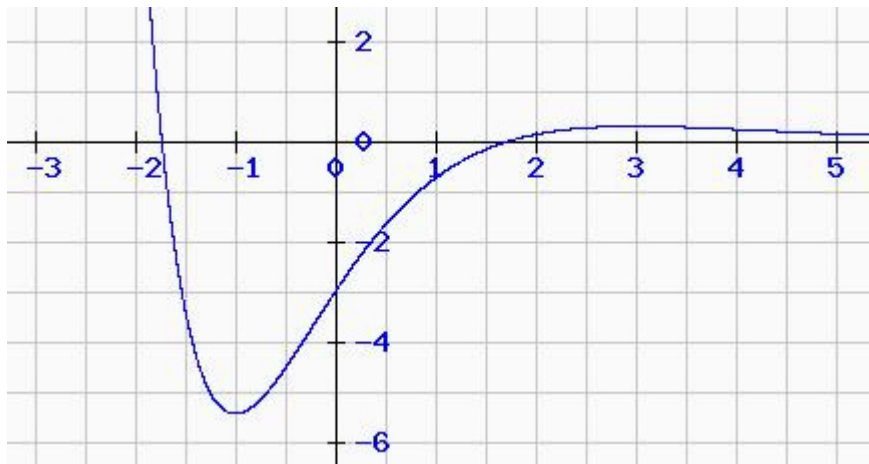
Damit ist  $x_1 = 3$  und  $x_2 = -1$ .

In  $f''(x)$  einsetzen:  $f''(3) = -4 \cdot e^{-3} < 0$ , also Hochpunkt.

$$f''(-1) = 4 \cdot e > 0, \text{ also Tiefpunkt.}$$

In  $f(x)$  einsetzen:  $f(3) = 6 \cdot e^{-3} \approx 0,3$ . Also ist  $E_1(3; 6 \cdot e^{-3}) \approx E_1(3; 0,3)$  ist ein Hochpunkt.

$f(-1) = -2 \cdot e \approx -5,44$ . Also ist  $E_2(-1; -2 \cdot e) \approx E_2(-1; -5,44)$  ist ein Tiefpunkt.



e)  $f(x) = x \cdot e^{-2x+1}$

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-2x+1} & v'(x) = -2 \cdot e^{-2x+1} \end{array}$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = 1 \cdot e^{-2x+1} - 2 \cdot e^{-2x+1} \cdot x = (1 - 2x) \cdot e^{-2x+1}$$

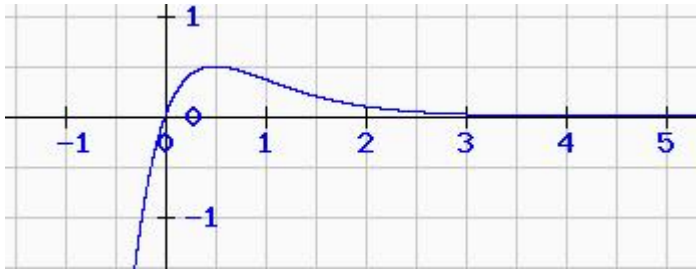
$$\text{Analog: } f''(x) = -2 \cdot e^{-2x+1} - 2 \cdot e^{-2x+1} \cdot (1 - 2x) = (-2 - 2 \cdot (1 - 2x)) \cdot e^{-2x+1} = (4x - 4) \cdot e^{-2x+1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \quad (\text{und } e^{-2x+1} = 0, \text{ was aber keine Lösung hat})$$

Damit ist  $x = 1/2$ .

In  $f''(x)$  einsetzen:  $f''(1/2) = -2 \cdot e^0 = -2 < 0$ , also Hochpunkt.

In  $f(x)$  einsetzen:  $f(1/2) = 1/2 \cdot e^0 = 1/2$ . Also ist  $E(1/2; 1/2)$  ein Hochpunkt.



$$2) a) f(x) = 2e^x + 4e^{-x}$$

$$f'(x) = 2e^x - 4e^{-x}$$

$$f''(x) = 2e^x + 4e^{-x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2e^x - 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2e^x = 4e^{-x} \Leftrightarrow e^x = 2e^{-x} & | :e^{-x} \\ &e^{2x} = 2 & | \ln(\ ) \\ &2x = \ln(2) & | :2 \end{aligned}$$

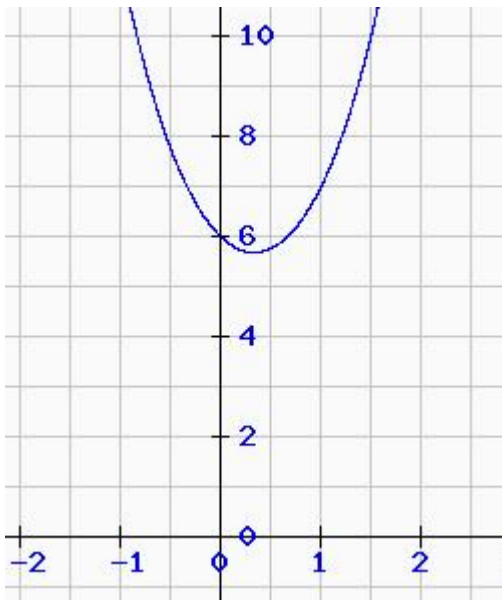
Damit ist  $x = \ln(2)/2 \approx 0,35$ .

Oben wurde beim Dividieren durch  $e^{-x}$  das Potenzgesetz  $a^n : a^m = a^{n-m}$  verwendet:

$$e^x : e^{-x} = e^{x-(-x)} = e^{2x}$$

In  $f''(x)$  einsetzen:  $f''(\ln(2)/2) = 4 \cdot \sqrt{2} > 0$ , also Tiefpunkt.

In  $f(x)$  einsetzen:  $f(\ln(2)/2) = 4 \cdot \sqrt{2} \approx 5,66$ . Also ist  $E(\ln(2)/2; 4 \cdot \sqrt{2}) \approx E(0,35; 5,66)$  ist Tiefpunkt.



$$b) f(x) = 3e^{2x} - 2e^{-3x}$$

$$f'(x) = 6e^{2x} + 6e^{-3x}$$

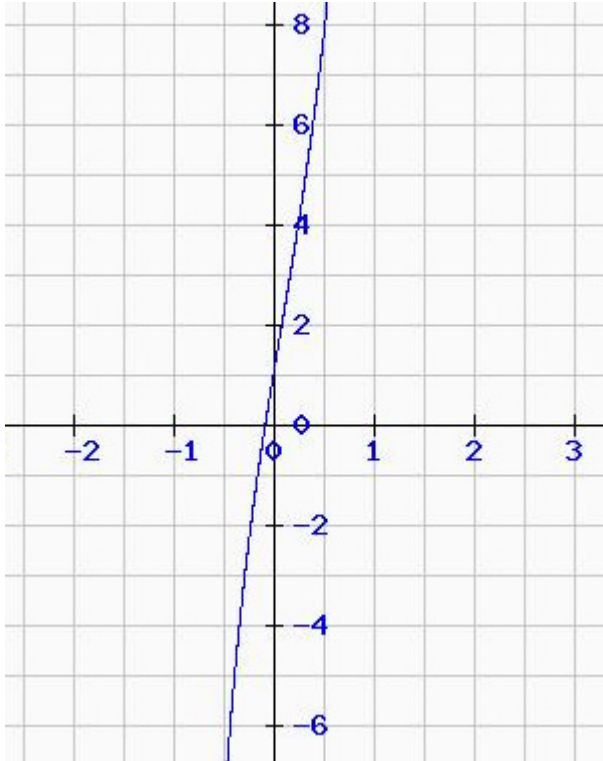
$$f''(x) = 12e^{2x} - 18e^{-3x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6e^{2x} + 6e^{-3x} = 0 \Leftrightarrow 6e^{2x} = -6e^{-3x} \quad (\text{Ab hier ist schon klar, dass keine Lösung existiert.})$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = -e^{-3x} \quad | :e^{-3x}$$

$$e^{5x} = -1 \quad | \ln(\ )$$

Damit existieren keine Extrema bei dieser Funktion, denn  $\ln(a)$  kann nur für  $a > 0$  berechnet werden.



$$c) f(x) = e^{-2x} + 4x$$

$$f'(x) = -2e^{-2x} + 4$$

$$f''(x) = 4e^{-2x}$$

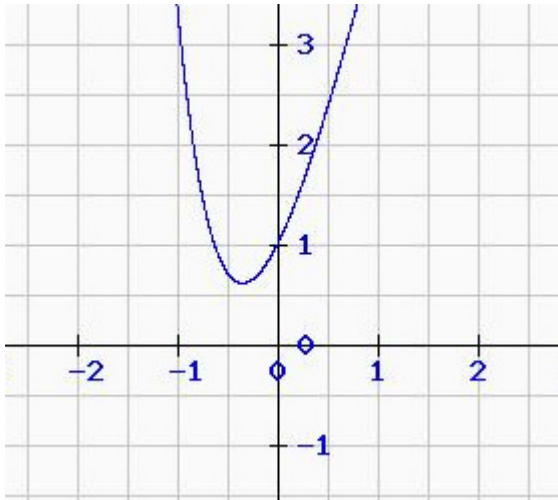
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} + 4 = 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} = -4 \Leftrightarrow e^{-2x} = 2 \quad | \ln(\ )$$

$$-2x = \ln(2) \quad | : (-2)$$

Damit ist  $x = -\ln(2)/2 \approx -0,35$ .

In  $f''(x)$  einsetzen:  $f''(-\ln(2)/2) = 8 > 0$ , also Tiefpunkt.

In  $f(x)$  einsetzen:  $f(-\ln(2)/2) = 2 - 2 \cdot \ln(2) \approx 0,61$ . Also ist  $E(-\ln(2)/2; 2 - 2 \cdot \ln(2)) \approx E(-0,35; 0,61)$  ein Tiefpunkt.



3) a)  $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$  (Ergab sich über die Kettenregel, innere Ableitung war  $-2x$ .)

Für die zweite Ableitung wird die Produktregel benötigt.

$$\begin{aligned} u(x) &= -2x & u'(x) &= -2 \\ v(x) &= e^{-x^2} & v'(x) &= -2x \cdot e^{-x^2} \end{aligned}$$

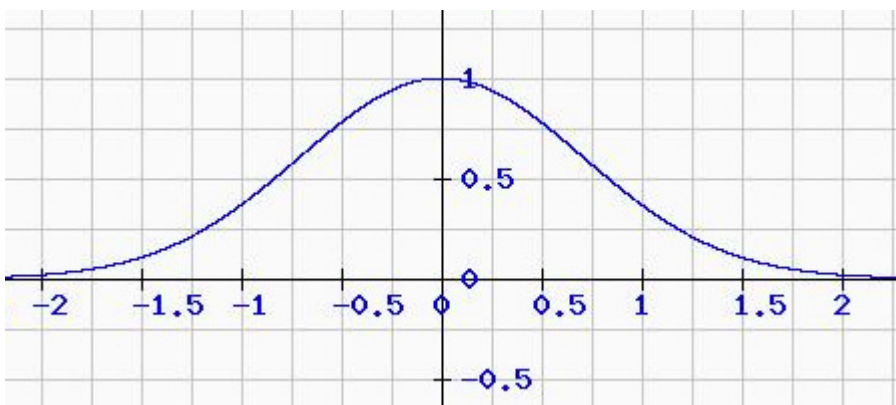
$$f''(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = (-2 - 2x \cdot (-2x)) \cdot e^{-x^2} = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0$  (und  $e^{-x^2} = 0$ , was aber keine Lösung hat)

Damit ist  $x = 0$ .

In  $f''(x)$  einsetzen:  $f''(0) = -2 \cdot e^0 = -2 < 0$ , also Hochpunkt.

In  $f(x)$  einsetzen:  $f(0) = e^0 = 1$ . Also ist  $E(0; 1)$  ein Hochpunkt.



b)  $f(x) = \frac{e^{-x}}{(2+e^{-x})^2}$  (nur notwendige Bedingung)

Wir benötigen die Quotientenregel:

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-x} & u'(x) &= -e^{-x} \\ v(x) &= (2 + e^{-x})^2 & v'(x) &= -e^{-x} \cdot 2 \cdot (2 + e^{-x}) = -2 \cdot e^{-x} \cdot (2 + e^{-x}) \end{aligned}$$

Bei  $v'$  wurde die Kettenregel verwendet. Wir dürfen nicht ausmultiplizieren, denn wir können gleich den Faktor  $(2 + e^{-x})$  kürzen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2} = \frac{-e^{-x} \cdot (2+e^{-x})^2 + 2 \cdot e^{-x} \cdot (2+e^{-x}) \cdot e^{-x}}{(2+e^{-x})^2} \\ &= \frac{[-e^{-x} \cdot (2+e^{-x}) + 2 \cdot e^{-2x}] \cdot (2+e^{-x})}{(2+e^{-x})^4} = \frac{-e^{-x} \cdot (2+e^{-x}) + 2 \cdot e^{-2x}}{(2+e^{-x})^3} = \frac{-2 \cdot e^{-x} - e^{-2x} + 2 \cdot e^{-2x}}{(2+e^{-x})^3} \\ &= \frac{-2 \cdot e^{-x} + e^{-2x}}{(2+e^{-x})^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -2 \cdot e^{-x} + e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot e^{-x} = -e^{-2x} \Leftrightarrow 2 \cdot e^{-x} = e^{-2x} \quad | : e^{-x} \\ &2 = e^{-x} \quad | \ln(\ ) \\ &\ln(2) = -x \end{aligned}$$

Damit ist  $x = -\ln(2) \approx -0,69$

Bei dieser Aufgabe sollte nur die notwendige Bedingung geprüft werden. Damit benötigen wir keine zweite Ableitung. Für Interessierte, hier wäre

$$f''(x) = \frac{e^{-3x} - 8e^{-2x} + 4e^{-x}}{(2+e^{-x})^4} \quad \text{und } f''(-\ln(2)) = -1/16 < 0, \text{ also Hochpunkt.}$$

$f(-\ln(2)) = 1/8$ , also ist  $E(-\ln(2); 1/8) \approx E(-0,69; 0,125)$  ein Hochpunkt.

