

Extrempunkte und Wendepunkte bestimmen

1) Gesucht werden die Art und die Lage der Extrema von :

- a) $f(x) = -x^2 + 6x + 4$
- b) $f(x) = -1/3 \cdot x^3 + 9x + 5$
- c) $f(x) = 1/2 \cdot x^4 - 4x^2 + 3$
- d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2$
- e) $f(x) = 1/3 \cdot x^3 - 2a \cdot x^2 - 4$; $a > 0$
- f) $f(x) = 1/x + x$

2) Gesucht werden die Art und die Lage der Wendepunkte von:

- a) $f(x) = x^3 - 6x^2$
- b) $f(x) = 1/6 \cdot x^4 - 1/3 \cdot x^3 - 2x^2 + 2$
- c) $f(x) = -x^3 + a \cdot x^2 + 2a^3$; $a \neq 0$

Lösungen:

1)

a)

$$f(x) = -x^2 + 6x + 4$$

$$f'(x) = -2x + 6$$

$$f''(x) = -2$$

$$f'(x) = 0 \quad (\text{notwendige Bedingung für Extrema})$$

$$-2x + 6 = 0 \quad | -6$$

$$-2x = -6 \quad | :(-2)$$

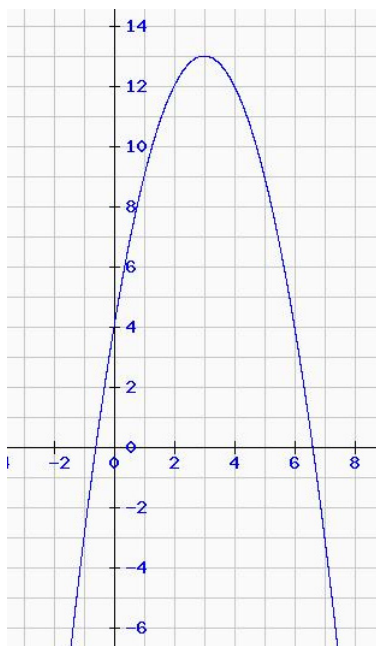
$$x = 3$$

In $f''(x)$ einsetzen:

$$f''(3) = -2 < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

In $f(x)$ einsetzen:

$$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 4 = 13 \quad E(3; 13) \quad (\text{HP})$$



b)

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x + 5$$

$$f'(x) = -x^2 + 9$$

$$f''(x) = -2x$$

$$f''(x) = 0$$

$$-x^2 + 9 = 0 \quad | -9$$

$$-x^2 = -9 \quad | :(-1)$$

$$x_{1/2} = \pm 3$$

In $f''(x)$ einsetzen:

$$f''(3) = -2 \cdot 3 < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

$$f''(-3) = -2 \cdot (-3) = 6 > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

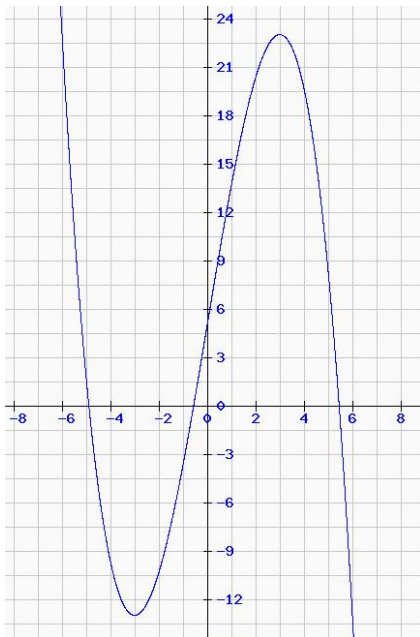
In $f(x)$ einsetzen:

$$f(3) = -1/3 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3 + 5 = 23$$

$$f(-3) = -1/3 \cdot (-3)^3 + 9 \cdot (-3) + 5 = -13$$

$E_1(3; 23)$ (HP)

$E_2(-3; -13)$ (TP)



c)

$$f(x) = 1/2 \cdot x^4 - 4x^2 + 3$$

$$f'(x) = 2x^3 - 8x$$

$$f''(x) = 6x^2 - 8$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 8x = 0 \quad | :2$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 4) = 0 \quad (\text{somit ist } x_1 = 0)$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x_{2/3} = \pm 2$$

In $f''(x)$ einsetzen:

$$f''(0) = 0 - 8 < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

$$f''(2) = 6 \cdot 2^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

$$f''(-2) = 6 \cdot (+2)^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

In $f(x)$ einsetzen:

$$f(0) = 3$$

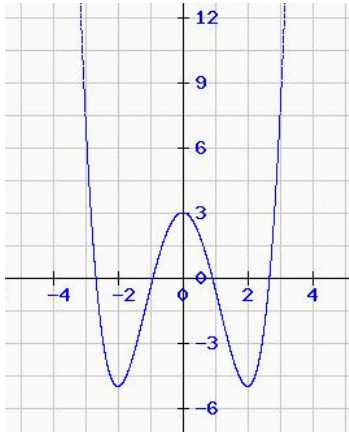
$$f(2) = -5$$

$$f(-2) = -5$$

$E_1 (0;3)$ (HP)

$E_2 (2;-5)$ (TP)

$E_3 (-2;-5)$ (TP)



d)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4}$$
$$= 2$$

Doppelte Nullstelle von f' ist ein Hinweis auf einen Sattelpunkt.

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 12 = 0$$

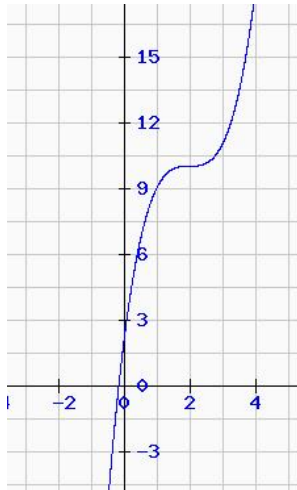
Wir müssen in $f'''(x)$ einsetzen, um zu prüfen, ob ein Sattelpunkt vorliegt, da ein Sattelpunkt ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente ist ($f'(2) = 0 \Rightarrow$ waagrechte Tangente, mit $f''(2) = 0$ und $f'''(2) \neq 0$ liegt dann auch ein Wendepunkt vor und somit, wegen der waagrechten Tangente, ein Sattelpunkt).

Es gilt $f'''(x) = 6$ und damit $f'''(2) = 6 \neq 0$.

\Rightarrow Sattelpunkt = Wendepunkt mit waagerechter Tangente

Funktionswert berechnen: $f(2) = 10$

$S(2; 10)$ ist Sattelpunkt.



e)

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2ax^2 - 4$$

$$f'(x) = x^2 - 4ax$$

$$f''(x) = 2x - 4a$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4ax = 0$$

$$x \cdot (x - 4a) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 4a$$

In $f''(x)$ einsetzen:

$$f''(0) = -4a < 0 \text{ (da } a > 0) \Rightarrow \text{HP}$$

$$f''(4a) = 2 \cdot 4a - 4a = 4a > 0 \text{ (da } a > 0) \Rightarrow \text{TP}$$

In $f(x)$ einsetzen:

$$f(0) = -4 \Rightarrow E_1(0; -4) \text{ (HP)}$$

$$f(4a) = \frac{1}{3} \cdot (4a)^3 - 2a \cdot (4a)^2 - 4$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 64a^3 - 2a \cdot 16a^2 - 4$$

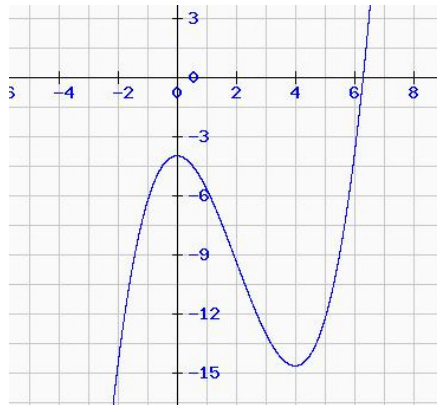
$$= \frac{64}{3} \cdot a^3 - 32a^3 - 4$$

$$= -\frac{32}{3} \cdot a^3 - 4$$

$$\Rightarrow E_2(4a; -\frac{32}{3} \cdot a^3 - 4) \text{ (TP)}$$

Bemerkung zur Schreibweise: Eigentlich würde $-\frac{32}{3}a^3$ statt $-32/3 \cdot a^3$ genügen, da aber schon in Schulbüchern $1/2a$ stand, aber falsch $1/(2a)$ bzw. $\frac{1}{2a}$ gemeint war, was falsch ist, wurde hier noch mal teils mit einem Malpunkt verdeutlicht, dass mit $-32/3 \cdot a^3$ der Term $-32/3 \cdot a^3$ gemeint ist, nicht $\frac{-132}{3a^3}$.

Es folgt der Graph für a = 1:



f)

$f(x) = 1/x + x = x^{-1} + x$ (ist kein Polynom, gebrochenrationale Funktion)

$$f'(x) = -x^{-2} + 1 (= -1/x^2 + 1)$$

$$f''(x) = 2x^{-3} (= 2/x^3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1/x^2 + 1 = 0 \quad | \cdot x^2$$

$$-1 + x^2 = 0 \quad | +1$$

$$x^2 = 1/\sqrt{\quad}$$

$$x_{1/2} = \pm 1$$

In $f''(x)$ einsetzen:

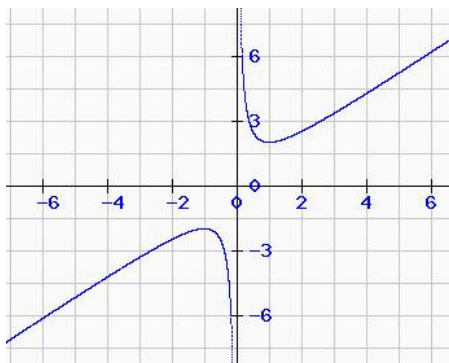
$$f''(1) = 2 \cdot 1^{-3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

$$f''(-1) = 2 \cdot (-1)^{-3} = -2 < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

In $f(x)$ einsetzen:

$$f(1) = 1/1 + 1 = 2 \Rightarrow E_1(1; 2) \text{ (TP)}$$

$$f(-1) = 1/-1 + (-1) = -2 \Rightarrow E_2(-1; -2) \text{ (HP)}$$



2) a)

$$f(x) = x^3 - 6x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0$$

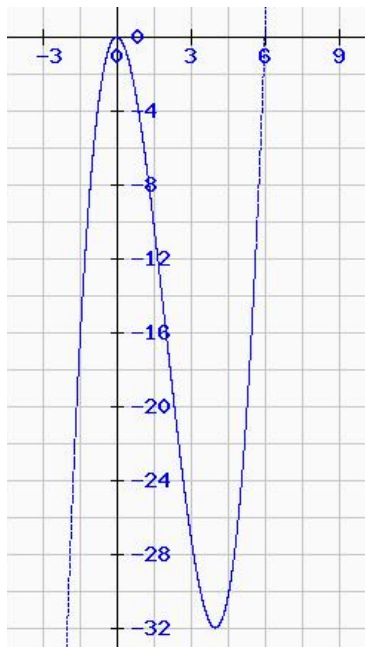
$$x = 2$$

In $f'''(x)$ einsetzen:

$$f'''(2) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{WP}$$

In $f(x)$ einsetzen:

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 = -16 \Rightarrow W(2; -16)$$



b)

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^4 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2x^2 + 2$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 - x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

$$f'''(x) = 4x - 2$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

In $f'''(x)$ einsetzen:

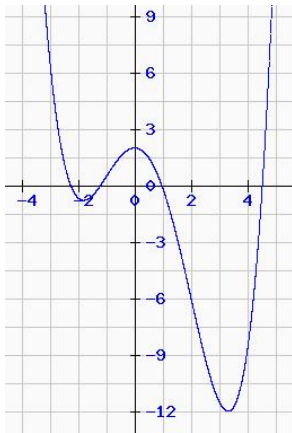
$$f'''(2) = 4 \cdot 2 - 2 = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{WP (da } f''''(2) > 0 \text{ R-L-WP)}$$

$$f'''(-1) = 4 \cdot (-1) - 2 = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{WP (da } f''''(-1) < 0 \Rightarrow \text{L-R-WP)}$$

In $f(x)$ einsetzen:

$$f(2) = -6 \Rightarrow \text{WP}_1(2; -6)$$

$$f(-1) = 1/2 \Rightarrow \text{WP}_2(-1; 1/2)$$



c)

$$f(x) = -x^3 + a \cdot x^2 + 2a^3 \quad ; a \neq 0$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2a \cdot x$$

$$f''(x) = -6x + 2a$$

$$f'''(x) = -6$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 2a = 0 \quad | -2a$$

$$-6x = -2a \quad | :(-6)$$

$$x = 1/3 \cdot a$$

In $f'''(x)$ einsetzen:

$$f'''(1/3 \cdot a) = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{WP}$$

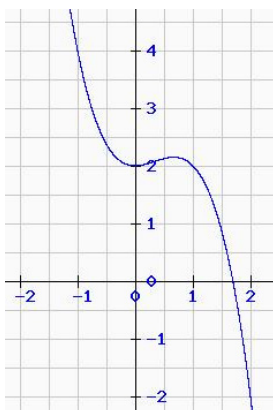
In $f(x)$ einsetzen:

$$f(1/3 \cdot a) = -(1/3 \cdot a)^3 + a \cdot (1/3 \cdot a)^2 + 2a^3$$

$$= -1/27 \cdot a^3 + 1/9 \cdot a^3 + 2a^3$$

$$= 56/27 \cdot a^3$$

$$\Rightarrow \text{W}(1/3 \cdot a; 56/27 \cdot a^3)$$



(Graph für $a = 1$)