Extrempunkte und Wendepunkte bei Polynomen bestimmen

1) Gesucht werden die Art und die Lage der Extrema von :

   a) $f(x) = - x^2 + 6x + 4$
   b) $f(x) = -1/3x^3 + 9x + 5$
   c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 – 4x^2 + 3$
   d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2$
   e) $f(x) = 1/3x^3 - 2a\cdot x^2 - 4$; $a > 0$
   f) $f(x) = 1/x + x$

2) Gesucht werden die Art und die Lage der Wendepunkte von:

   a) $f(x) = x^3 - 6x^2$
   b) $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2$
   c) $f(x) = -x^3 + a\cdot x^2 + 2a^3$; $a \neq 0$

Lösungen:

1)

a)

$f(x) = - x^2 + 6x + 4$

$f'(x) = -2x + 6$

$f''(x) = -2$

$f'(x) = 0$ (notwendige Bedingung für Extrema)

$-2x + 6 = 0 \mid -6$

$-2x = -6 \mid :(-2)$

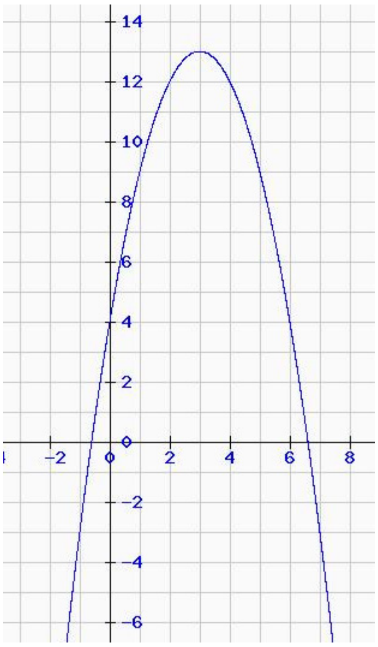
$x = 3$

In $f''(x)$ einsetzen:

$f''(3) = -2 < 0 \Rightarrow$ HP

In $f(x)$ einsetzen:

$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 4 = 13$ E(3; 13) (HP)



b)

$f(x) = -1/3x^3 + 9x + 5$

$f'(x) = -x^2 + 9$

$f''(x) = -2x$

$f''(x) = 0$

$-x^2 + 9 = 0 \mid -9$

$-x^2 = -9\mid :(-1)$

$x_{1/2} = \pm 3$

In f''(x) einsetzen:

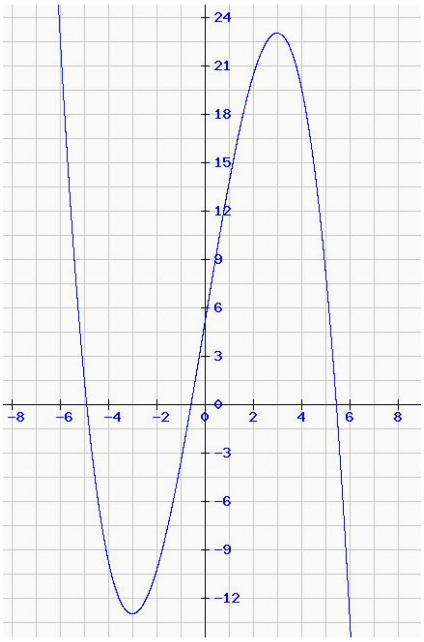
$$f''(3) = -2 \cdot 3 < 0 \Rightarrow HP$$
$$f''(-3) = -2 \cdot (-3) = 6 > 0 \Rightarrow TP$$

In f(x) einsetzen:

$$f(3) = -1/3 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3 + 5 = 23$$
$$f(-3) = -1/3 \cdot (-3)^3 + 9 \cdot (-3) + 5 = -13$$

E_1 (3; 23) (HP)

E_2 (-3; -13) (TP)



c)

$f(x) = ½x^4 – 4x^2 + 3$

$f'(x) = 2x^3 - 8x$

$f''(x) = 6x^2 - 8$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad 2x^3 - 8x = 0 \mid :2$

$x^3 - 4x = 0$

$x \cdot (x^2 - 4) = 0 \qquad$ (somit ist $\quad x_1 = 0$)

$x^2 - 4 = 0$

$x_{2/3} = \pm 2$

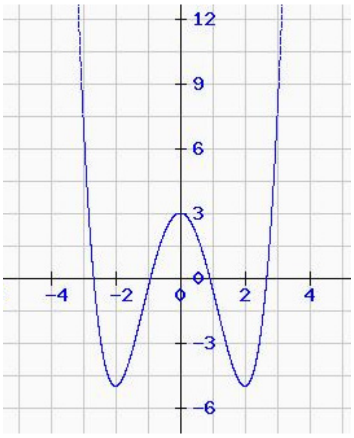
In f''(x) einsetzen:

$$f''(0) = 0 – 8 < 0 \Rightarrow HP$$
$$f''(2) = 6 \cdot 2^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow TP$$
$$f''(-2) = 6 \cdot (+2)^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow TP$$

In f(x) einsetzen:

$f(0) = 3$
$f(2) = -5$
$f(-2) = -5$

E_1 (0;3) (HP)
E_2 (2;-5) (TP)
E_3 (-2;-5) (TP)



d)
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$
$f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-4}$
$= 2$

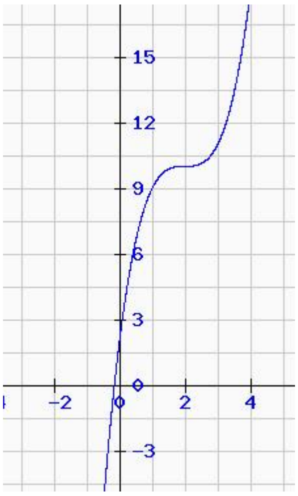
Doppelte Nullstelle von f' ist ein Hinweis auf einen Sattelpunkt.

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 12 = 0$

Wir müssen in $f'''(x)$ einsetzen, um zu prüfen, ob ein Sattelpunkt vorliegt, da ein Sattelunkt ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente ist ($f'(2) = 0 \Rightarrow$ waagrechte Tangente, mit $f''(2) = 0$ und $f'''(2) \neq 0$ liegt dann auch ein Wendepunkt vor und somit, wegen der waagrechten Tangente, ein Sattelpunkt).

Es gilt $f'''(x) = 6$ und damit $f'''(2) = 6 \neq 0$.
$\Rightarrow$ Sattelpunkt = Wendepunkt mit waagerechter Tangente

Funktionswert berechnen: $f(2) = 10$
S(2; 10) ist Sattelpunkt.



e)

$f(x) = 1/3x^3 - 2ax^2 - 4$

$f'(x) = x^2 - 4ax$

$f''(x) = 2x – 4a$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4ax = 0$

$x \cdot (x – 4a) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = 4a$

In f''(x) einsetzen:

$f''(0) = - 4a < 0$ (da $a > 0$) $\Rightarrow$ HP

$f''(4a) = 2 \cdot 4a – 4a = 4a > 0$ (da $a > 0$) $\Rightarrow$ TP

In f(x) einsetzen:

$f(0) = -4 \Rightarrow E_1\ (0; -4)$ (HP)

$f(4a) = 1/3 \cdot (4a)^3 - 2a \cdot (4a)^2 - 4$

$= 1/3 \cdot 64a^3 - 2a \cdot 16a^2 - 4$

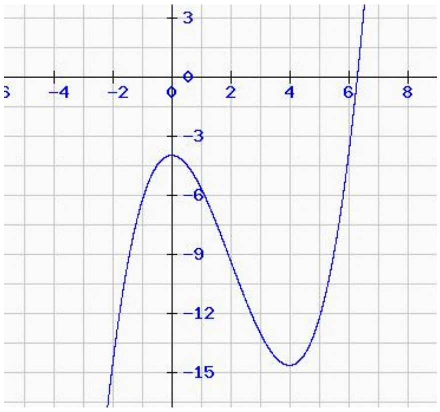
$= 64/3 \cdot a^3 - 32a^3 - 4$

$= -32/3 \cdot a^3 - 4$

$\Rightarrow E_2\ (4a; -32/3 \cdot a^3 - 4)$ (TP)

Bemerkung zur Schreibweise: Eigentlich würde $-32/3a^3$ statt $-32/3 \cdot a^3$ genügen, da aber schon in Schulbücher $1/2a$ stand, aber falsch $1/(2a)$ bzw. $\frac{1}{2a}$ gemeint war, was falsch ist, wurde hier noch mal teils mit einem Malpunkt verdeutlicht, dass mit $-32/3a^3$ der Term $-32/3 \cdot a^3$ gemeint ist, nicht $-\frac{132}{3a^3}$.

Es folgt der Graph für a = 1:



f)

$f(x) = 1/x + x = x^{-1} + x$

$f'(x) = -x^{-2} + 1$ $(= -1/x^2 + 1)$

$f''(x) = 2x^{-3}$ $(= 2/x^3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1/x^2 + 1 = 0 \mid \cdot x^2$

$-1 + x^2 = 0 \mid +1$

$x^2 = 1 / \sqrt{}$

$x_{1/2} = \pm 1$

In f''(x) einsetzen:

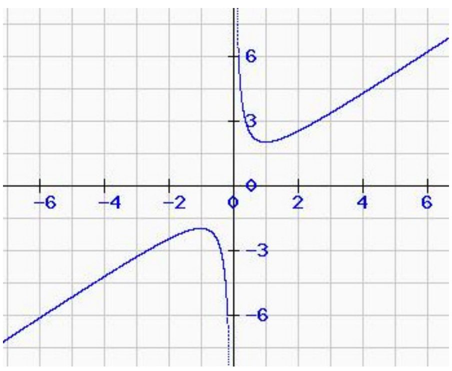
$f''(1) = 2 \cdot 1^{-3} = 2 > 0 \Rightarrow TP$

$f''(-1) = 2 \cdot (-1)^{-3} = -2 < 0 \Rightarrow HP$

In f(x) einsetzen:

$f(1) = 1/1 + 1 = 2 \Rightarrow E_1\ (1; 2)$ (TP)

$f(-1) = 1/-1 + (-1) = -2 \Rightarrow E_2\ (-1; -2)$ (HP)



2) a)

$f(x) = x^3 - 6x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 12x$

$f''(x) = 6x - 12$

$f'''(x) = 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0$

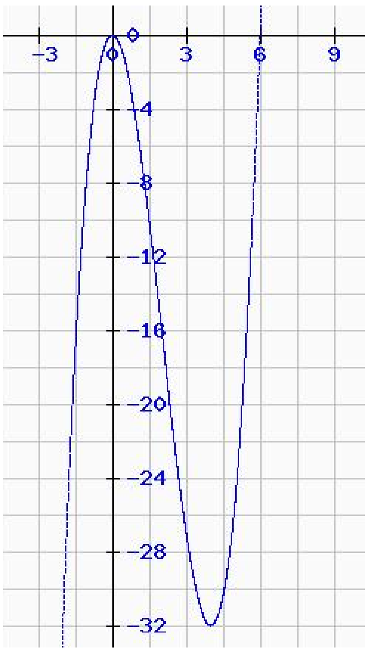
$x = 2$

In $f'''(x)$ einsetzen:

$f'''(2) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ WP

In $f(x)$ einsetzen:

$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 = -16 \;\Rightarrow W(2; -16)$



b)

$f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2$

$f'(x) = 2/3x^3 - x^2 - 4x$

$f''(x) = 2x^2 - 2x - 4$

$f'''(x) = 4x - 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \mid :2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_{1/2} = ½ \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$

$= ½ \pm 3/2$

$x_1 = 2$

$x_2 = -1$

In f'''(x) einsetzen:

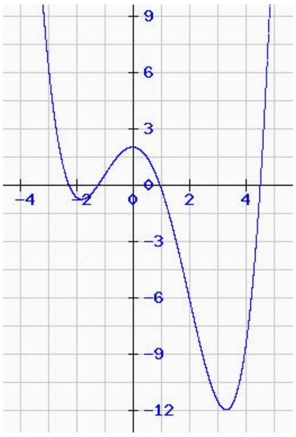
$$f'''(2) = 4 \cdot 2 - 2 = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{WP (da } f'''(2) > 0 \text{ R -L-WP)}$$

$$f'''(-1) = 4 \cdot (-1) - 2 = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{WP (da } f'''(-1) < 0 \Rightarrow \text{L-R- WP)}$$

In f(x) einsetzen:

$$f(2) = -6 \Rightarrow WP_1\ (2; -6)$$

$$f(-1) = 1/2 \Rightarrow WP_2\ (-1; 1/2)$$



c)

$f(x) = -x^3 + a \cdot x^2 + 2a^3 \quad ; a \neq 0$

$f'(x) = -3x^2 + 2a \cdot x$

$f''(x) = -6x + 2a$

$f'''(x) = -6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 2a = 0 \quad | -2a$

$$-6x = -2a \mid :(-6)$$

$$x = 1/3 \cdot a$$

In f'''(x) einsetzen:

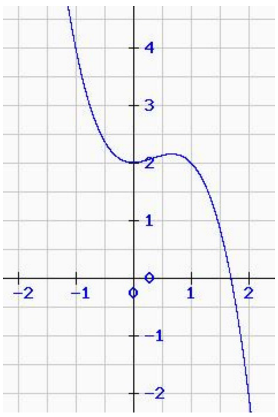
$$f'''(1/3 \cdot a) = -6 \neq 0 \Rightarrow WP$$

In f(x) einsetzen:

$$f(1/3 \cdot a) = -(1/3 \cdot a)^3 + a \cdot (1/3 \cdot a)^2 + 2a^3$$

$$= -1/27 \cdot a^3 + 1/9 \cdot a^3 + 2a^3$$

$$= 56/27 \cdot a^3 \qquad \Rightarrow W(1/3 \cdot a; 56/27 \cdot a^3)$$



(Graph für a = 1)