Aufgaben zur Exponentialfunktion

1) Eine Tasse Kaffee kühlt nach der folgenden Vorschirft ab:

$T(t) = 20 + 40e^{-k \cdot t}$. Dabei ist T(t) die Temperatur in Grad C nach t Minuten und $k > 0$.

a) Wie hoch ist die Anfangstemperatur?

b) Nach 4 Minuten ist der Kaffee noch 35° warm. Wie groß wäre dann k?

c) Wie lang muss man mindestens warten, wenn man $k = 0{,}2$ einen Kaffe mit einer maximalen Temperatur von 30°C haben möchte?

d) Welche Temperatur hat der Kaffee nach 8 Minuten (für $k = 0{,}2$)?

e) Welche Temperatur wird langfristig ungefähr werden?

2) Wie lauten die Extrempunkte von $f(x) = (-2x^2+10) \cdot e^{-0{,}5x}$?

3) a) Es werden die Wendepunkte von $f(x) = e^{-x^2}$ gesucht.

b) Welche Symmetrieeigenschaften hat $f(x) = e^{-x^2}$?

Lösungen:

1) $T(t) = 20 + 40e^{-k\cdot t}$

a) Anfangstemperatur: $T(0) = 20 + 40e^{0} = 60$, also 60° C.

b) Nach 4 Minuten ist der Kaffee noch 35° warm. Wie groß wäre dann k?
Wir müssen die Gleichung $T(4) = 35$ nach k auflösen.

$$
\begin{aligned}
T(4) = 20 + 40 \cdot e^{-4k} &= 35 && \mid -20 \\
40\cdot e^{-4k} &= 15 && \mid :40 \\
e^{-4k} &= 3/8 && \mid \ln(\,) \\
-4k &= \ln(3/8) && \mid :(-4) \\
k &= -\ln(3/8)/4 \approx 0{,}2452
\end{aligned}
$$

c) Wie lang muss man mindestens warten, wenn man k = 0,2 einen Kaffee mit einer maximalen Temperatur von 30°C haben möchte?

Man kann $T(t) \leq 30$ nach t auflösen oder $T(t) = 30$, womit man die Zeit erhält, die man mindestens warten muss.

$$
\begin{aligned}
20 + 40\cdot e^{-0{,}2t} &= 30 && \mid -20 \\
40\cdot e^{-0{,}2t} &= 10 && \mid :40 \\
e^{-0{,}2t} &= \tfrac{1}{4} && \mid \ln(\,) \\
-0{,}2t &= \ln(1/4) && \mid :(-0{,}2) \\
t &= -\frac{\ln(1/4)}{0{,}2} \approx 6{,}9314
\end{aligned}
$$

Also muss mindestens ca. 6,93 Minuten gewartet werden, damit der Kaffee höchstens 30° C warm ist.

d) Temperatur nach 8 Minuten:

$T(8) = 20 + 40 \cdot e^{-0{,}2\cdot 8} \approx 28{,}0759$, also ca. 28,08°C

e) Welche Temperatur wird langfristig ungefähr werden?

$$\lim_{t\to\infty} 20 + 40e^{-kt} = 20$$

Also wird sich die Temperatur 20°C annähern.

2) Wie lauten die Extrempunkte von $f(x) = (-2x^2+10)\cdot e^{-0{,}5x}$

$$
\begin{aligned}
u(x) &= -2x^2 + 10 & u'(x) &= -4x \\
v(x) &= e^{-0{,}5x} & v'(x) &= -0{,}5\cdot e^{-0{,}5x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x) = -4x\cdot \color{red}{e^{-0{,}5x}} - 0{,}5\cdot \color{red}{e^{-0{,}5x}}\cdot(-2x^2 + 10) = (-4x - 0{,}5\cdot(-2x^2 + 10))\cdot \color{red}{e^{-0{,}5x}} \\
&= (x^2 - 4x - 5)\cdot e^{-0{,}5x}
\end{aligned}
$$

Analog: $f''(x) = (2x - 4)\cdot e^{-0,5x} - 0,5\cdot e^{-0,5x}\cdot(x^2 - 4x - 5) = (2x - 4 - 0,5\cdot(x^2 - 4x - 5))\cdot e^{-0,5x}$
$= (-0,5x^2 + 4x - 1,5)\cdot e^{-0,5x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$ (und $e^{-0,5x} = 0$, was aber keine Lösung hat)

Damit ergibt sich mit der p-q-Formel $x_1 = 5$ und $x_2 = -1$.

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(5) = 6\cdot e^{-2,5} > 0$, also Tiefpunkt.
$f''(-1) = -6\cdot e^{0,5} < 0$, also Hochpunkt.

In $f(x)$ einsetzen: $f(5) = -40\cdot e^{-2,5} \approx -3,28$. Also ist $E_1(5; -40\cdot e^{-2,5}) \approx E_2(5; -3,28)$ ist ein Tiefpunkt.
$f(-1) = 8\cdot e^{0,5} \approx 13,19$. Also ist $E_2(-1; 8\cdot e^{0,5}) \approx E_2(-1; 13,19)$ ist ein Hochpunkt.

3) a) Wendepunkt von $f(x) = e^{-x^2}$ gesucht.

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$u(x) = -2x$ $\quad u'(x) = -2$
$v(x) = e^{-x^2}$ $\quad v'(x) = -2x\cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x) = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} (-2x)$
$= (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$

$f'''(x) = 8x \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2) = (8x - 2x\cdot (4x^2 - 2)) \cdot e^{-x^2}$
$= (-8x^3 + 12x) \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2 = 0$ (und $e^{-x^2} = 0$, was aber keine Lösung hat)
$4x^2 - 2 = 0 \quad | +2$
$4x^2 = 2 \quad | :4$
$x^2 = ½ \quad | \sqrt{\ }$
$x_{1/2} = \pm \sqrt{1/2} \approx \pm 0,707$

$f'''(\sqrt{1/2}) \approx 3,43 \neq 0$, also liegt an der Stelle $x = \sqrt{1/2}$ ein Wendepunkt vor.
$f'''(-\sqrt{1/2}) \approx -3,43 \neq 0$, also liegt an der Stelle $x = -\sqrt{1/2}$ ein Wendepunkt vor.

$f(\sqrt{1/2}) = e^{-1/2} \approx 0,607$
$f(-\sqrt{1/2}) = e^{-1/2} \approx 0,607$ (klar wegen der Symmetrie)

$W_1(\sqrt{1/2};\ e^{-1/2}) \approx W_1(0,707; 0,607)$
$W_2(-\sqrt{1/2}; e^{-1/2}) \approx W_2(-0,707; 0,607)$

b) Welche Symmetrieeigenschaften hat $f(x) = e^{-x^2}$?

Achsensymmetrisch zur y-Achse, denn $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$.