Aufgaben zu Integralrechnung (mit etwas höherem Schwierigkeitsgrad)

Gesucht wird a:

1) a) $\int_0^a 8x^3 \ dx = 162$ (mit a > 0)
   b) $\int_0^2 (ax^2 + \ 12) \ dx = 16$

2) a) Die Fläche zwischen der Kurve von f(x) = x-1, der x-Achse und der Gerade x = a (für a > 1) soll 2 FE betragen. Welchen Wert hat a?
   b) Die Fläche zwischen der Kurve von f(x) = x^3 + x, der x-Achse, der Geraden x = a (a > 0) soll 6 FE betragen. Welchen Wert hat a?

3) Die Kurve der Funktion f(x) = -x^3 + 4x schließt mit der x-Achse im 1. Quadrant eine Fläche ein. Diese soll

   a) durch die Gerade x = a (mit a > 0) halbiert werden.
   b) g(x) = ax (mit 0 < a < 2) halbiert werden.

   Wie muss jeweils a gewählt werden?

Lösungen:

1) a) $\int_0^a 8x^3 \ dx = [\frac{8}{4}x^4]_0^a = [2x^4]_0^a = 2a^4$

   Damit muss $2a^4$= 162 sein.

   $2a^4 = 162 \quad |:2$
   $a^4 = 81 \quad |\sqrt[4]{\ }$
   a = 3 (oder a = - 3, da a aber größer 0 sein soll, gilt nur a = 3)

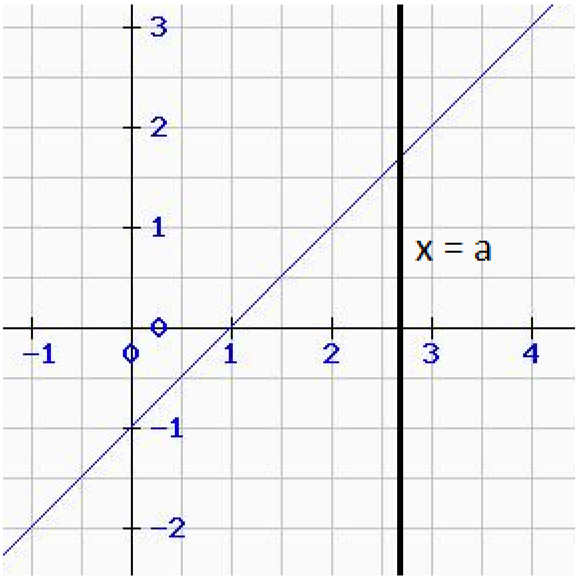
   b) $\int_0^2 (ax^2 + \ 12)$ dx = $[\frac{1}{3}ax^3 + \ 12x]_0^2 = 1/3 \cdot a \cdot 2^3 + \ 12 \cdot 2 - 0$

   $\frac{8}{3}a + 24 = 16 \quad |-24$

   $\frac{8}{3}a = -8 \quad |\cdot \frac{3}{8}$

   a = -3

2) a) f hat bei x = 1 eine Nullstelle.



$$\int_1^a (x-1)dx = 2$$

$$\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^a = 2$$

$$\frac{1}{2}a^2 - a - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^1 - 1\right) = 2$$

$$\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{1}{2} = 2 \mid -2$$

$$\frac{1}{2}a^2 - a - \frac{3}{2} = 0 \mid \cdot 2$$

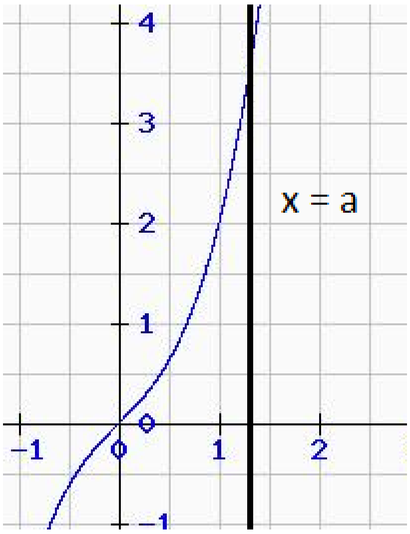
$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a_{1/2} = 1 \pm\sqrt{1+3}$$

$$= 1 \pm 2$$

Damit ergibt sich: $a_1 = 3$ und $a_2 = -1$. Da $a > 1$ sein soll: $a = 3$

b) $f(x) = x^3 + x$



Wo liegen die Nullstellen von f?

$x^3 + x = 0$

$x \cdot (x^2 + 1) = 0 \quad x_1 = 0$

$x^2 = -1$ keine weiteren Nullstellen.

Die Untergrenze für die Integration ist also 0.

$\int_0^a (x^3 + x)\,dx = 6$

$\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^a = 6$

$\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^2 - 0 = 6 \mid -6$

$\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^2 - 6 = 0 \mid \cdot 4$

$a^4 + 2a^2 - 24 = 0$

Substitution: $a^2 = z$ ($\Rightarrow a^4 = z^2$)

$z^2 + 2z - 24 = 0$

$z_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+24}$

$\quad = -1 \pm 5$

Also: $z_1 = 4$; $z_2 = -6$

$a_{1/2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$a_{3/4} = \pm\sqrt{-6}$

Somit ergeben sich zwei Lösungen, wobei nur a = 2 zulässig ist (denn a soll positiv sein laut Aufgabenstellung).

3) a) Nullstellen von f:

$-x^3 + 4x = 0 \mid : (-1)$

$x^3 - 4x = 0$

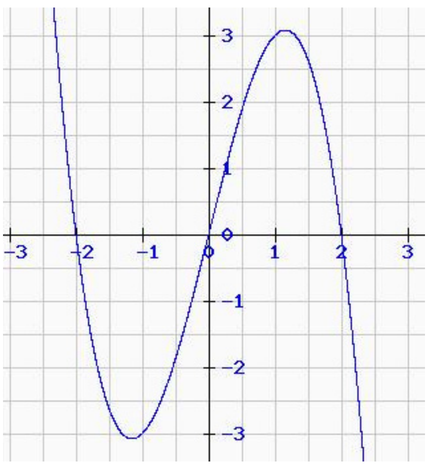
$x \cdot (x^2 - 4) = 0$

$x_1 = 0$

$x^2 - 4 = 0 \mid +4$

$x = 4 \mid \sqrt{}$

$x_{2/3} = \pm 2$



Somit ist die Untergrenze für die Integration 0 (hier beginnt auch rechts davon der 1. Quadrant). Für die Bestimmung der Gesamtfläche im 1. Quadranten (zwischen Kurve und x – Achse) benötigen wir 2 als Obergrenze.

$\int_0^2 (-x^3 + 4x)\,dx = [-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2]_0^2 = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 0 = -4 + 8 = 4$

Diese Fläche soll durch x = a halbiert werden:

$\int_0^a (-x^3 + 4x)\,dx = \frac{4}{2}$

$\int_0^a (-x^3 + 4x)dx = [-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2]_0^a = -\frac{1}{4}a^4 + 2a^2 - 0 = 2$

$-\frac{1}{4}a^4 + 2a^2 = 2 \quad | - 2$

$-\frac{1}{4}a^4 + 2a^2 - 2 = 0 \;\; | \cdot (-4)$

$a^4 - 8a^2 + 8 = 0$

Substitution: $a^2 = z$ ($\Rightarrow a^4 = z^2$)

$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 8}$

$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{8}$

$z_1 = 4 + \sqrt{8} \approx 6{,}828$

$z_2 = 4 - \sqrt{8} \approx 1{,}172$

$a_{1/2} = \pm\sqrt{z_1} \approx \pm 2{,}613$

$a_{3/4} = \pm \sqrt{z_2} \approx \pm 1{,}082$

Da a zwischen 0 und 2 liegen muss, ist a ≈ 1,082.

b) Wir benötigen den Schnittpunkt:

f(x) = g (x)

$-x^3 + 4x = ax \;|-ax$

$-x^3 + 4x - ax = 0 \mid : (-1)$

$x^3 - 4x + ax = 0$

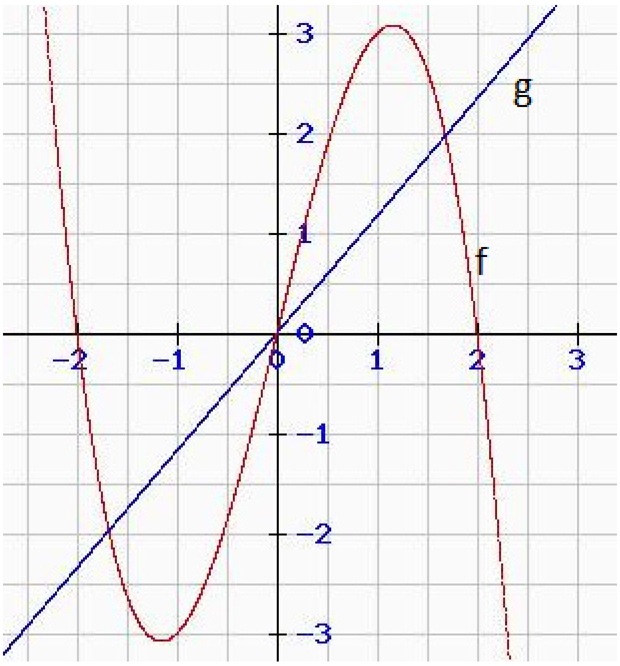
$x \cdot (x^2 - 4 + a) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

$x^2 - 4 + a = 0$

$x^2 = 4 - a \mid \sqrt{}$

$x_{2/3} = \pm \sqrt{4-a}$

Da es um die Fläche im 1. Quadraten geht ist die Untergrenze für die Integration wieder gleich 0 und die Obergrenze ist $\sqrt{4-a}$.



Da im Integrationsintervall f über g liegt, ist der Integrand f(x) – g(x).

$$\int_0^{\sqrt{4-a}} (f(x) - g(x))dx = \int_0^{\sqrt{4-a}} (-x^3 + 4x - ax)\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}ax^2\right]_0^{\sqrt{4-a}}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{4-a})^4 + 2 \cdot (\sqrt{4-a})^2 - \frac{1}{2}a \cdot (\sqrt{4-a})^2$$

$\int_0^{\sqrt{4-a}} (f(x) - g(x))dx = -\frac{1}{4} \cdot (4-a)^2 + 2 \cdot (4-a) - \frac{1}{2} a \cdot (4-a)$

$= -\frac{1}{4} \cdot (16 - 8a + a^2) + 8 - 2a - 2a + \frac{1}{2} a^2$

$= -4 + 2a - \frac{1}{4} a^2 + 8 - 4a + \frac{1}{2} a^2$

$= 1/4 \cdot a^2 - 2a + 4$

Bemerkung:

Oben wurde $(\sqrt{x})^4 = x^2$ verwendet, da $\sqrt{x} = x^{1/2}$ und $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ gilt.

Somit gilt $1/4 \cdot a^2 - 2a + 4 = 2$.

$1/4a^2 - 2a + 4 = 2 \mid -2$

$1/4a^2 - 2a + 2 = 0 \mid \cdot 4$

$a^2 - 8a + 8 = 0$

$a_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 8}$

$= 4 \pm \sqrt{8}$

$a_1 \approx 6{,}828$

$a_2 \approx 1{,}172$

Da a zwischen 0 und 2 liegen muss, ist $a \approx 1{,}172$.