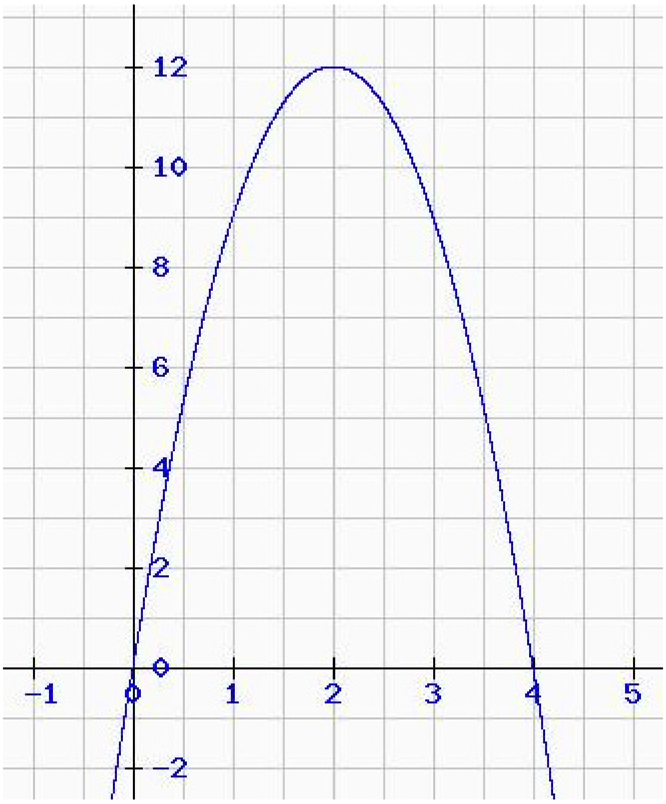
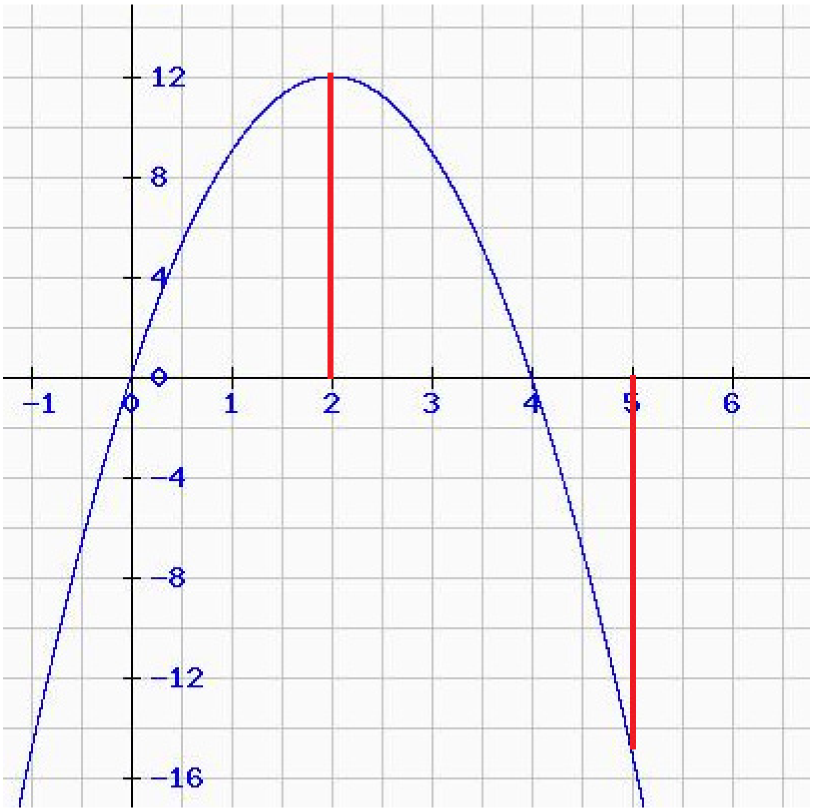
Aufgaben zur Flächenberechnung mit der Integralrechung

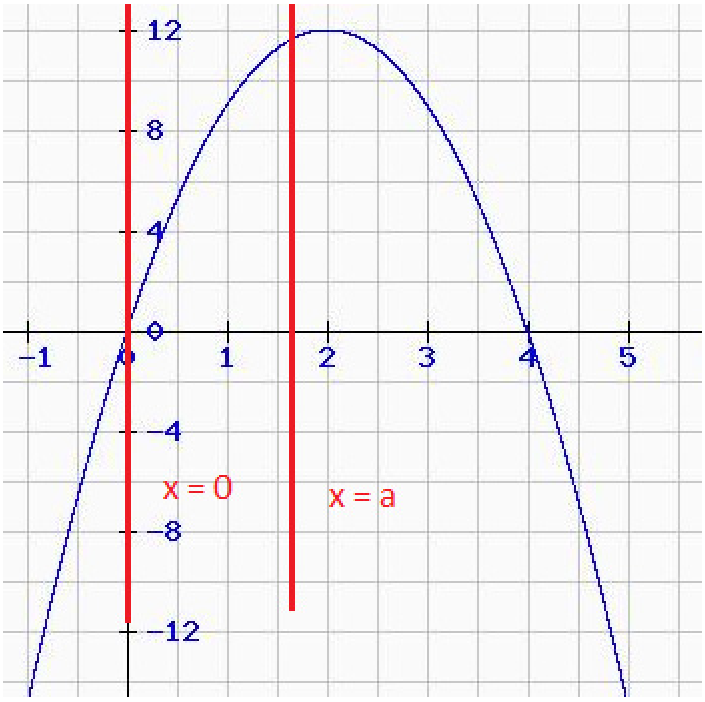
1) Geben ist die Funktion $f(x) = -3x^2 + 12x$.



a) Wie groß ist die Fläche, die die Kurve von f mit der x-Achse einschließt?
b) Welche Fläche schließt der Graph von f mit der x-Achse über dem Intervall I = [2, 5] ein?



c) Die Fläche zwischen der Kurve von f, der x-Achse zwischen den Geraden x = 0 und x = a ($0 < a < 4$) beträgt 5 Flächeneinheiten (d.h. über dem Intervall I = [0, a]). Wie groß ist a?



Lösung:
Es werden zunächst die Nullstellen bestimmt:

$f(x) = -3x^2 + 12x = 0 \quad | :(-3)$

$x^2 - 4x = 0$

a) Mit der p-q-Formel, oder wenn man x ausklammert, erhält man $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.

$$A = \int_0^4 (-3x^2 + 12x)dx = \left[-x^3 + 6x^2\right]_0^4 = -4^3 + 6 \cdot 4^2 - (-0^3 + 6 \cdot 0^2) = 32 \quad \text{(FE)}$$

b) In das Intervall I = [2, 5] fällt eine Nullstelle, nämlich $x_2 = 4$. Damit muss man zwei Integrale berechnen (siehe Grafik):

$$A_1 = \int_2^4 (-3x^2 + 12x)dx = \left[-x^3 + 6x^2\right]_2^4 = 16 \quad \text{(FE)}$$

$$A_2 = \left|\int_4^5 (-3x^2 + 12x)dx\right| = \left|\left[-x^3 + 6x^2\right]_4^5\right| = |-7| = 7 \quad \text{(FE)}$$

$A = A_1 + A_2 = 23$ (FE)

c)

$$\int_0^a (-3x^2 + 12x)dx = \left[-x^3 + 6x^2\right]_0^a = -a^3 + 6a^2 \overset{!}{=} \quad 5(FE)$$

Also gilt:

$$-a^3 + 6a^2 = 5 \quad | -5$$

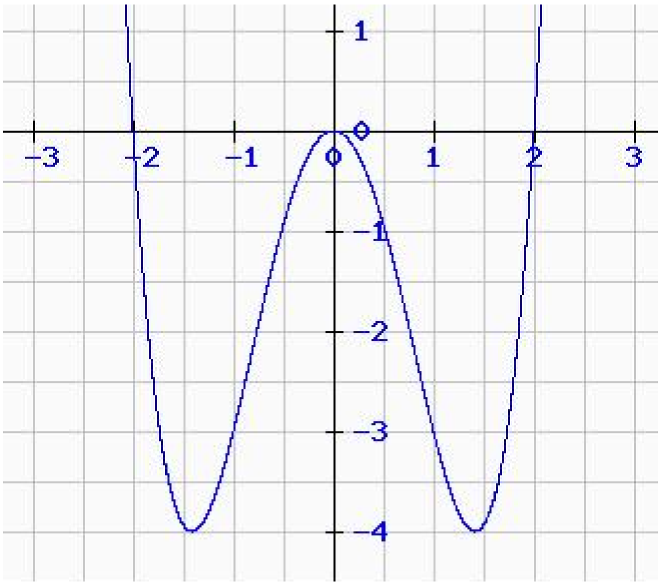
$$-a^3 + 6a^2 - 5 = 0 \quad | \quad \cdot(-1)$$

$$a^3 - 6a^2 + 5 = 0$$

Hier können wir a nicht ausklammern und benötigen eine Polynomdivision. Dazu muss man a_1 erraten. Wir finden $a_1 = 1$.

Mit der Polynomdivision (diese kann man unter http://www.mathe-total.de/Test-Polynomdivision/Polynomdivision.php üben) ergibt sich $(a^3 - 6a^2 + 5) : (a - 1) = a^2 - 5a - 5$. $a^2 - 5a - 5 = 0$ ergibt mit der p-q-Formel: $a_2 \approx -0{,}854$ und $a_3 \approx 5{,}854$. Da nur $a_1 = 1$ zwischen 0 und 4 liegt, muss a = 1 sein!

2) Geben ist die Funktionen $f(x) = x^4 - 4x^2$.
Wie groß ist die Fläche, die die Kurve von f mit der x-Achse einschließt?



Lösung:
Es werden zunächst die Nullstellen bestimmt:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0$$

Damit ist $x_{1/2} = 0$.

$x^2 - 4 = 0$ ergibt $x_3 = -2$ und $x_4 = 2$

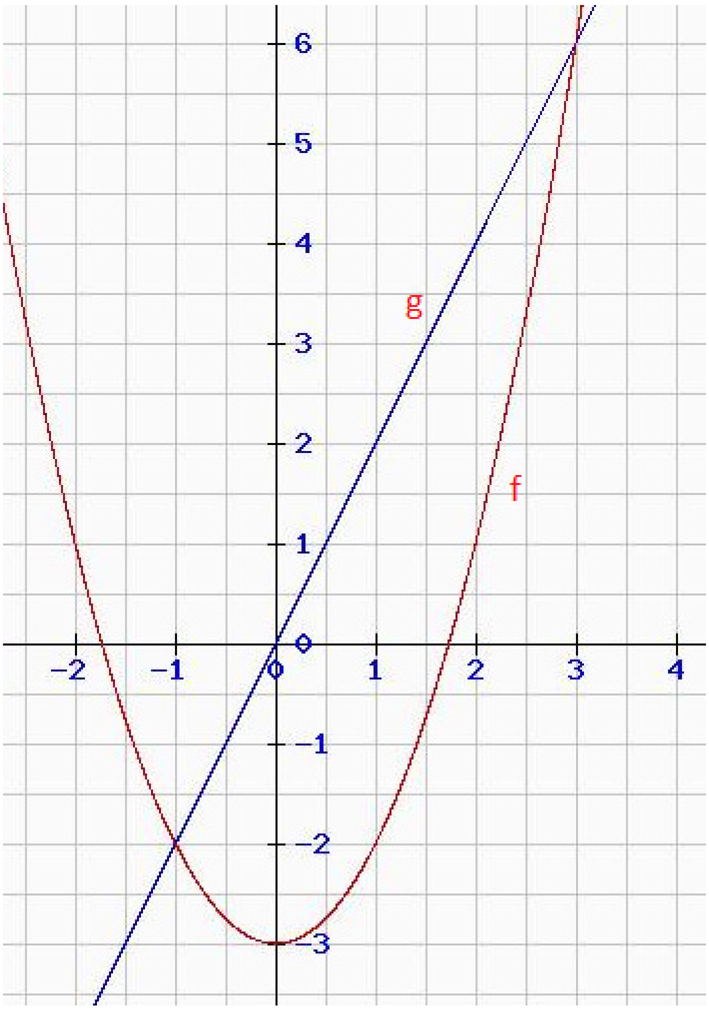
Damit müssten wir allgemein zwei Integrale berechnen, wobei die beiden Flächen gleich groß sind, denn f ist achsensymmetrisch zur y-Achse ("es kommen nur gerade Exponenten vor"). Hier hätten wir aber ausnahmsweise nur ein Integral über dem Intervall [-2; 2] berechnen können, da eine doppelte Nullstelle bei x = 0 vorliegt und damit eine Extremstelle.

$$A_1 = \left|\int_0^2 (x^4 - 4x^2)dx\right| = \left|\left[1/5 \cdot x^5 - 4/3 \cdot x^3\right]_0^2\right| = |-64/15| = 64/15 \quad \text{(FE)}$$

$$A_2 = \left|\int_{-2}^0 (x^4 - 4x^2)dx\right| = \left|\left[1/5 \cdot x^5 - 4/3 \cdot x^3\right]_{-2}^0\right| = |-64/15| = 64/15 \quad \text{(FE)}$$

$A = A_1 + A_2 = 128/15$ FE $\approx 8{,}533$ FE

3) Geben sind Funktionen $f(x) = x^2 - 3$ und $g(x) = 2x$. Wie groß ist die Fläche, die von den beiden Kurven eingeschlossen wird?



Lösung:
Hier müssen zunächst die Schnittstellen bestimmt werden:

$f(x) = g(x)$

$x^2 - 3 = 2x \quad | -2x$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

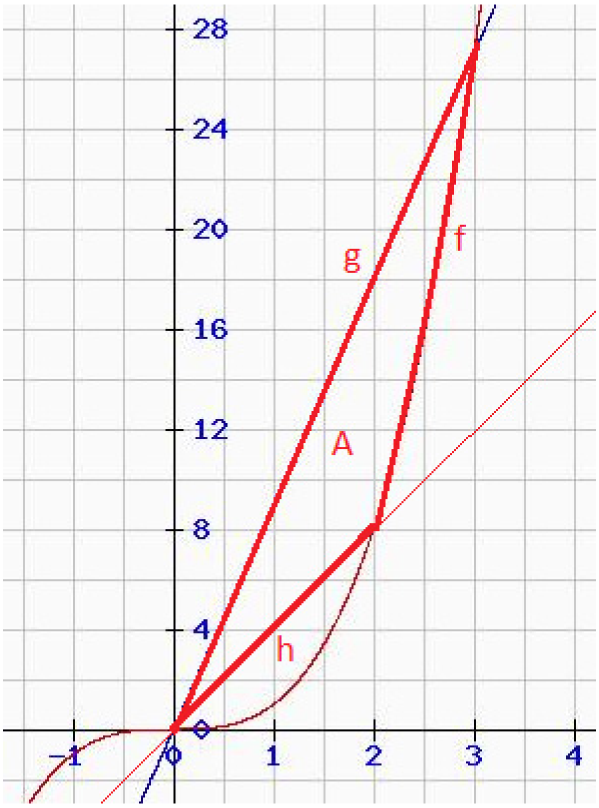
Damit ist $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$.

Da zwischen den Schnittstellen die Kurve von g über der von f liegt, integrieren wir über g(x) - f(x) (andernfalls müsste man den Betrag verwenden).

$$A = \int_{-1}^{3} (g(x) - f(x))dx = \int_{-1}^{3} (2x - (x^2 - 3))dx = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)dx = \left[-1/3 \cdot x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3}$$

Also A = 32/3 (FE) ≈ 10,667 (FE).

4) Geben sind Funktionen $f(x) = x^3$, $g(x) = 9x$ und $h(x) = 4x$. Wie groß ist die Fläche, die von den drei Kurven im ersten Quadraten eingeschlossen wird (siehe Grafik)?



Hier muss man jeweils zwischen zwei Funktionen die Schnittstellen bestimmen, wobei nicht alle Schnittstellen relevant sind.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 = 9x \Leftrightarrow x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 9) = 0$

Hier ergibt sich $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ und $x_3 = -3$. Wichtig wäre hier nur die Schnittstellen bei $x = 3$ (siehe Grafik oben).

Analog ergeben sich bei f(x) = h(x) die Schnittstellen $x_4 = 0$, $x_5 = 2$ und $x_6 = -2$ (wir haben einfach weiter nummeriert), wobei nur die Schnittstellen bei x = 2 relevant ist (siehe Grafik oben).

g(x) = h(x) ergibt eine Schnittstelle bei x = 0.

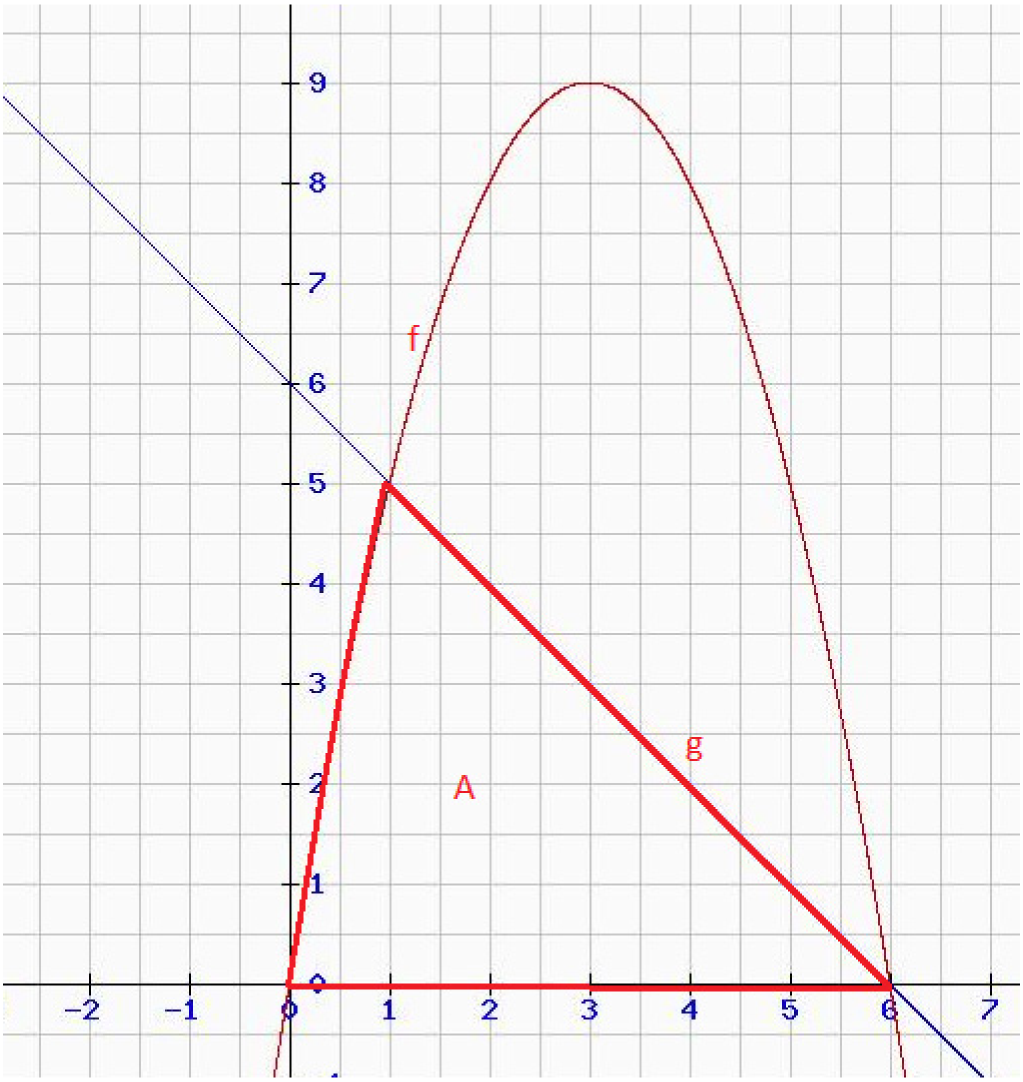
Wenn man die Grafik betrachtet, sieht man, dass zwei Flächen berechnet werden müssen:
Für x zwischen 0 und 2 liegt die Kurve von g oben und die von h unten (Fläche A_1).
Für x zwischen 2 und 3 liegt die Kurve von g oben und die von f unten (Fläche A_2).

$$A_1 = \int_0^2 (g(x) - h(x))dx = \int_0^2 (9x - 4x)dx = \int_0^2 5x\,dx = \left[5/2 \cdot x^2\right]_0^2 = 10 \ \ \text{(FE)}$$

$$A_2 = \int_2^3 (g(x) - f(x))dx = \int_2^3 (9x - x^3)dx = \left[9/2 \cdot x^2 - 1/4 \cdot x^4\right]_2^3 = 25/4 \ \ \text{(FE)}$$

$A = A_1 + A_2 = 65/4$ (FE) = 16,25 (FE)

5) Geben sind Funktionen $f(x) = -x^2 + 6x$ und $g(x) = -x + 6$. Wie groß ist die Fläche, die von den beiden Kurven und der x-Achse eingeschlossen wird (siehe Grafik)?



Lösung:
Hier müssen zunächst die Schnittstellen bestimmt werden:

$f(x) = g(x)$

$-x^2 + 6x = -x + 6 \quad | +x - 6$

$-x^2 + 7x - 6 = 0 \quad | \cdot(-1)$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

Damit ist $x_1 = 1$ und $x_2 = 6$. Wie an der Grafik zu sehen ist, spielt die Schnittstelle von f und g bei x = 1 eine Rolle, sowie die kleiner Nullstelle von f bei x = 0 und die Nullstelle von g bei x = 6.

Dieses mal ist die Flächen von unten durch die x-Achse begrenzt.

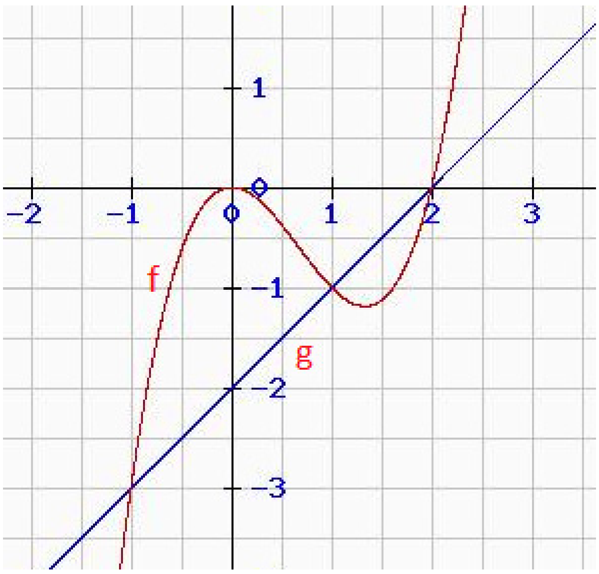
Wenn man die Grafik betrachtet, sieht man, dass zwei Flächen berechnet werden müssen:
Für x zwischen 0 und 1 liegt die Kurve von f oben und die x-Achse unten (Fläche A_1).
Für x zwischen 1 und 6 liegt die Kurve von g oben und die x-Achse unten (Fläche A_2).

$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (-x^2 + 6x)dx = \left[-1/3 \cdot x^3 + 3x^2\right]_0^1 = 8/3 \;\text{ (FE)}$$

$$A_2 = \int_1^6 g(x)\,dx = \int_1^6 (-x + 6)dx = \left[-1/2 \cdot x^2 + 6x\right]_1^6 = 25/2 \;\text{ (FE)}$$

$A = A_1 + A_2 = 91/6$ (FE) $\approx 15{,}167$ (FE)

6) Geben sind Funktionen $f(x) = x^3 - 2x^2$ und $g(x) = x - 2$. Wie groß ist die Fläche, die von den beiden Kurven eingeschlossen wird?



Lösung:
Hier müssen zunächst die Schnittstellen bestimmt werden:

$f(x) = g(x)$

$x^3 - 2x^2 = x - 2 \quad | \quad -x + 2$

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

Wir können kein x ausklammern und benötigen eine Polynomdivision. Dazu müssen wir eine Nullstelle raten. Wir probieren und finden $x_1 = 1$.

Polynomdivision:

```
 (x³  -2x²   -x    + 2) : (x - 1) = x² - x -2
-(x³ - x²)
---------------
        -x²   -x
      -(-x² + x)
     -----------------
             -2x + 2
           -(-2x + 2)
           ---------------
                   0
```

Zu den restlichen Schnittstellen:
$x^2 - x - 2 = 0$ mit der p-q-Formel gelöst ergibt: $x_2 = 2$ und $x_3 = -1$

Nun ordnen wir die Schnittstellen nach der Größe: -1; 1; 2.

Damit müssen wir zwei Integrale berechnen, einmal von -1 bis 1 und einmal von 1 bis 2.

$$A_1 = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - (x-2))dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2)dx$$

$$= \left[1/4 \cdot x^4 - 2/3 \cdot x^3 - 1/2 \cdot x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} = 8/3\,(FE)$$

Da zwischen den Schnittstellen 1 und 2 die Kurve von g über der von f liegt, integrieren wir über g(x) - f(x) (andernfalls müsste man den Betrag verwenden). Wenn man die Grafik oben nicht kennen würde, müsste man nur einen Wert zwischen 1 und 2 in beide Funktionen einsetzen und die Funktionswerte vergleichen: f(1,5) = -1,125, g(1,5) = -0,5, womit die Kurve von g über der Kurve von f liegt, wenn x zwischen 1 und 2 liegt.

$$A_2 = \int_{1}^{2} (g(x) - f(x))dx = \int_{1}^{2} (x - 2 - (x^3 - 2x^2))dx = \int_{1}^{2} (-x^3 + 2x^2 + x - 2)dx$$

$$= \left[-1/4 \cdot x^4 + 2/3 \cdot x^3 + 1/2 \cdot x^2 - 2x\right]_{1}^{2} = 5/12\,(FE)$$

Oder:

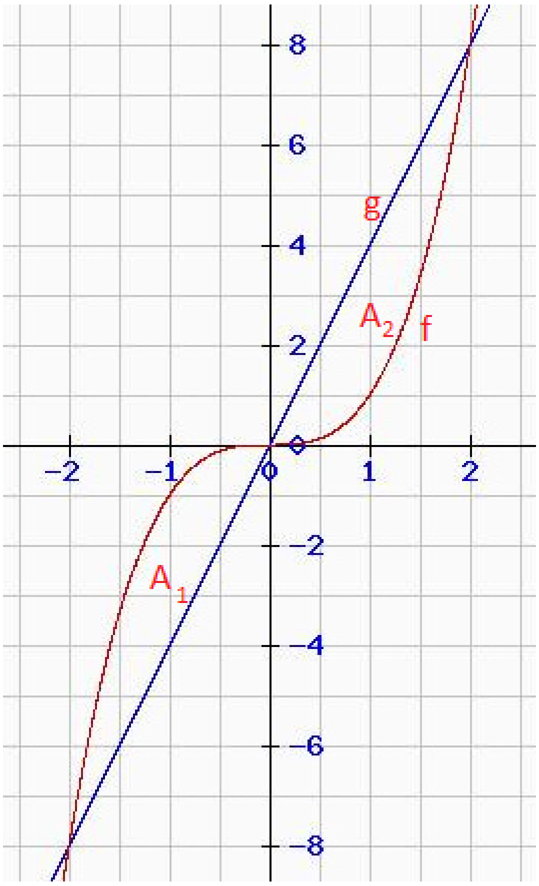
$$A_2 = \left|\int_1^2 (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_1^2 (x^3 - 2x^2 - (x-2))dx\right| = \left|\int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2)dx\right|$$

$$= \left|\left[1/4 \cdot x^4 - 2/3 \cdot x^3 - 1/2 \cdot x^2 + 2x\right]_1^2\right| = |-5/12| = 5/12 \text{ (FE)}$$

$A = A_1 + A_2 = 8/3$ (FE) + 5/12 (FE) = 37/12 (FE) ≈ 3,083 (FE)

7) Die Fläche zwischen den Kurven von $f(x) = x^3$ und $g(x) = a^2 \cdot x$ $(a > 0)$ soll 8 Flächeneinheiten betragen.

Lösung:



Wir berechnen wieder zuerst die Schnittstellen:

$f(x) = g(x)$

$x^3 = a^2\,x \quad | -a^2\,x$

$x^3 - a^2\,x = 0$

$x \cdot (x^2 - a^2) = 0$

Damit ist $x_1 = 0$.

$x^2 - a^2 = 0 \quad | + a^2$

$x^2 = a^2 \quad | \sqrt{\ }$

Also: $x_2 = a$ und $x_3 = -a$.

Da f und g beide punktsymmetrisch zum Ursprung sind, ist die Fläche zwischen den beiden Kurven über dem Intervall [-a, 0] so groß (d.h. A_1), wie die, über dem Intervall [0, a] (d.h. A_2).

Da $A_1 + A_2 = 8$ (FE) ist, muss $A_1 = A_2 = 4$ (FE) sein. Wir müssen damit nur A_1 oder A_2 bestimmen. Wenn x zwischen 0 und a liegt, dann liegt der Graph von g über dem von f:

$$\int_0^a (g(x) - f(x))dx = \int_0^a (a^2x - x^3)dx = [1/2 \cdot a^2x^2 - 1/4 \cdot x^4]_0^a = 1/2 \cdot a^2a^2 - 1/4 \cdot a^4 = 1/4 \cdot a^4 \stackrel{!}{=} 4$$

Also: $1/4 \cdot a^4 = 4 \quad | \cdot 4$

$a^4 = 16 \quad | \sqrt{\ }$

$a = 2$ (Da $a > 0$ sein muss.)