Anwendung der p-q-Formel

Die p-q-Formel kann zum Lösen von quadratischen Gleichungen oder zur Bestimmung von Nullstellen quadratischer Funktionen (Parabeln) verwendet werden.

Beispiel:
Gesucht werden die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = -2x^2 - 8x + 10$$

bzw. es soll die Gleichung

$$-2x^2 - 8x + 10 = 0$$

gelöst werden.

Lösung:

$$\begin{aligned} -2x^2 - 8x + 10 &= 0 \qquad |:(-2) \\ x^2 + 4x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben die Gleichung zur Bestimmung der Nullstelle zunächst auf die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

gebracht. Nun kann die direkt die p-q-Formel angewendet werden.

Die **p-q-Formel** zum Lösen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Anwendung der p-q-Formel im **Beispiel**:

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

Hier ist p = 4 und q = -5:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-5)} \\ &= -2 \pm \sqrt{4+5} \end{aligned}$$

Somit ist $x_1 = -2 + 3 = 1$ und $x_2 = -2 - 3 = -5$.

Wir haben zwei Nullstellen erhalten, da hier der Wert unter der Wurzel bzw. von $(p/2)^2 - q > 0$ war. Wäre $(p/2)^2 - q = 0$, so hätte die quadratische Gleichung nur eine Lösung und die Funktion hätte somit nur eine (doppelte) Nullstelle. Falls $(p/2)^2 - q < 0$ wäre, hätte die Gleichung keine Lösung (und somit hätte die Funktion keine Nullstellen).

Bei den nächsten beiden Beispielen ist keine p-q-Formel notwendig. Man hätte sie aber auch anwenden können. Bei Beispiel 1 wäre p = 0 und q = -16 und bei Beispiel 2 wäre p = -2 und q = 0.

Beispiel 1:

Gegeben ist die folgende quadratische Funktion:

$$f(x) = 2x^2 - 32$$

Bestimme die Nullstellen.

Lösung:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 32 &= 0 \qquad &|:2 \\ x^2 - 16 &= 0 \qquad &|+16 \\ x^2 &= 16 \qquad &|\pm\sqrt{} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich x = 4 oder x = -4, da das Quadrat beider Zahlen 16 ergibt. Man schreibt

$$x_1 = 4 \quad \text{und} \quad x_2 = -4$$

Hätte auf der rechten Seite -16 gestanden, so hätte f keine Nullstellen, denn es gibt keine reelle Zahl, die mit sich selbst multipliziert -16 ergibt.

Somit haben wir zwei Nullstellen und die x-Achse wird in den Punkten $N_1(4; 0)$ und $N_2(-4; 0)$ vom Graph von f geschnitten.

Beispiel 2:

Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktion:

$$f(x) = -2x^2 + 4x$$

Lösung:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x &= 0 \qquad &|:(-2) \\ x^2 - 2x &= 0 \end{aligned}$$

Hier kann man x ausklammern:

$$x(x-2) = 0$$

Nun ist ein Produkt gleich Null, wenn ein Faktor Null ist, also ist

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2$$

Somit haben wir die zwei Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

Beispiel 3:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

p = -10 und q = 25:

$$x_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25 - 25}$$

Hier sieht man das Prinzip der p-q-Formel. Die „Zahl vor dem x“ (also p) in der Gleichung wird halbiert und das Vorzeichen „gewechselt“:

$$-p/2 = -(-10)/2 = 5$$

Die erste Zahl unter der Wurzel ist das Quadrat der Zahl vor der Wurzel, also $5^2 = 25$, da eine Zahl nach dem Quadrieren sowieso immer positiv ist.

Die zweite Zahl unter der Wurzel ist das Negative von q, also q mit „gewechseltem“ Vorzeichen (= -q = -25). q ist die Zahl in der Gleichung, die mit keinem x „verknüpft“ ist.

In diesem Beispiel gibt es nur eine (doppelte) Lösung, da das Ergebnis unter der Wurzel Null ergibt:

$$x_{1/2} = 5 \pm 0 = 5$$

Bemerkung:

Bei $x^2 + x - 2 = 0$ wäre p = 1.