Aufgaben zu Geraden

1) Gesucht wird eine Gleichung in Parameterform der Geraden g durch die Punkte
a) A(2; 2; 4) nach B(5; 8; 3).
b) A(5; -2; 3) und B(4; -3; 5).
c) A(8; 3; -4) und B(8; 3; 5).
d) A(-2; 0; 6) und B(3; 5; 6).
e) Welche spezielle Lage haben die Geraden aus c) und d)?
f) Gebe zwei weitere Punkte der Gerade aus a) an.

2) a) Liegt der Punkt P(4; 6; 2) auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$?

b) Liegt der Punkt P(-2; 4; 1) auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$?

c) Liegt der Punkt P(0; 2,5; 3) auf der Strecke zwischen A(4; 3; 2) und B(-4; 2; 4)?
d) Liegen die drei Punkte A(5;-2;1), B(7;0;2) und C(1;6;-1) auf einer Geraden?

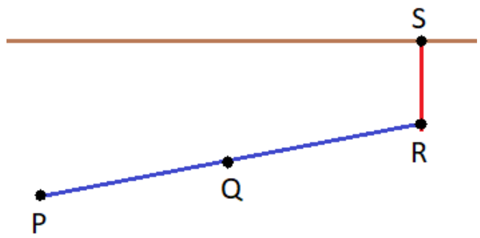
3) Wo trifft die Gerade mit der Gleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf

a) die x-y-Ebene?
b) die y-z-Ebene?

4) Es wird ein Schacht in einem Bergwerk vom Punkt P(400;-200;-300) in Richtung des Punkts Q(200;400;-200) gebohrt (alle Angaben in m). Dieser Schacht soll danach bis zu eine Tiefe von 100m (z = -100) weiter in gerader Richtung fortgeführt werden.

a) In welchem Punkt R ist dieser Schacht in einer Tiefe von 100m zu Ende?

b) Am Ende des Schachtes soll senkrecht nach oben gebohrt werden. Wie lautet die Gleichung der Geraden, auf der dieser Schacht liegt und wo befindet sich der Punkt S an der Erdoberfläche (z = 0)?



5) Die Lichtquelle L(0; 0; 20) ist in die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ausgerichtet.

a) Wo trifft der Lichtstrahl auf den Boden (x-y-Ebene)?
b) Der Lichtstrahl wird am Boden reflektiert. Es soll eine Gleichung der Gerade bestimmt werden, auf der der Weg des reflektierten Lichtstrahls liegt.

Lösungen:

1) Gesucht wird eine Gleichung in Parameterform der Geraden g durch die Punkte
a) A(2; 2; 4) nach B(5; 8; 3):

$g: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}$. Wir haben r für den Parameter gewählt. Natürlich ist auch jeder andere Buchstabe möglich (beispielsweise s oder t).

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5-2 \\ 8-2 \\ 3-4 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) A(5; -2; 3) und B(4; -3; 5):

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \quad -5 \\ -3-(-2) \\ 5 \quad -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) A(8; 3; -4) und B(8; 3; 5):

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \quad -8 \\ 3 \quad -3 \\ 5-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

d) A(-2; 0; 6) und B(3; 5; 6):

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 5 \quad -0 \\ 6 \quad -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Welche spezielle Lage haben die Geraden aus c) und d)?
Die Gerade aus c) verläuft parallel zur z-Achse und die Gerade aus d) parallel zur x-y-Ebene (da sich die z-Komponente nicht ändert und immer gleich 6 ist). Deren Projektion in die x-y-Ebene entspricht zudem der ersten Winkelhalbierenden.

f) Gebe zwei weitere Punkte der Gerade aus a) an: Wir müssen nur für r Werte einsetzen (für r = 0 würden wir A und für r = 1 den Punkt B erhalten bzw. zunächst deren Ortsvektoren, was auch als Probe genutzt werden kann). Wir setzen z.B. r = 2 und r = -1 ein, womit wir die Ortsvektoren der Punkte P und Q erhalten:

$$\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad P(8; 14; 2)$$

$$\overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad Q(-1; -4; 5)$$

2) a) Wir setzten $\overrightarrow{OP}$ für $\vec{x}$ ein: $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -2 + 3t & (1) \\ 6 = 2 + 2t & (2) \\ 2 = 4 - t & (3) \end{cases}$

Wenn P auf g liegt, müssen alle drei Gleichungen dieselbe Lösung haben, denn nur dann existiert ein t, so dass sich der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ des Punktes P beim Einsetzen in die Geradengleichung ergibt.

Erste Gleichung: 4 = -2 + 3t | + 2
6 = 3t | :3
t = 2

Nun können wir die anderen zwei Gleichungen analog nach t auflösen oder setzen t = 2 in jede der Gleichungen ein und prüfen, ob diese erfüllt sind: t = 2 in (2) einsetzen: 6 = 2 + 2· 2 ergibt 6 = 6, womit t = 2 auch eine Lösung der Gleichung (2) ist. t = 2 in (3) einsetzen: 2 = 4 – 2 ergibt 2 = 2
Damit ist t = 2 die Lösung aller drei Gleichungen und P liegt auf der Geraden g.

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 3 + t & (1) \\ 4 = 2 + 2t & (2) \\ 1 = 5 - 4t & (3) \end{cases}$

(1) ergibt -5 = t bzw. t = -5. (2) hat aber eine andere Lösung, nämlich t = 1. Damit liegt P nicht auf g.

c) Liegt der Punkt P(0; 2,5; 3) auf der Strecke zwischen A(4; 3; 2) und B(-4; 2; 4)?

Wir bestimmen zunächst die Gleichung der Geraden durch A und B:

$g: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}$.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4-4 \\ 2-3 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wir setzen $\overrightarrow{OP}$ für $\vec{x}$ ein: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4 - 8t & (1) \\ 2{,}5 = 3 - t & (2) \\ 3 = 2 + 2t & (3) \end{cases}$

Aus der Gleichung (1) ergibt sich -4 = -8t und somit ist t = 1/2 = 0,5. t = 1/2 ist auch Lösung von (2) und (3), womit erst einmal der Punkt P auf der Geraden g liegt. Damit P auf der Strecke zwischen A und B liegt, muss t zwischen 0 und 1 liegen (0 < t < 1). Dies ist der Fall. Somit liegt P auch auf der Strecke zwischen A und B und ist sogar der Mittelpunkt zwischen A und B, da t = 1/2 ist. Für $0 \leq t \leq 1$ wären die Randpunkte A und B mit eingeschlossen.

d) Liegen die drei Punkte A(5;-2;1), B(7;0;2) und C(1;-6;-1) auf einer Geraden? Wir bestimmen die Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B und machen dann die Punktprobe mit C, d.h. wir prüfen dann, ob C auf der Geraden durch A und B liegt. Dann würden alle drei Punkte auf einer Geraden (und zwar g) liegen:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7-5 \\ 0+2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir setzen $\overrightarrow{OC}$ für $\vec{x}$ ein: $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 5 + 2t & (1) \\ 6 = -2 + 2t & (2) \\ -1 = 1 + t & (3) \end{cases}$

Aus der Gleichung (1) ergibt sich -4 = 2t und somit ist t = 2. t = 2 ist aber keine Lösung von (2), was auf den ersten Blick zu sehen ist, denn 6 = -2 + 2· 2 ergibt 6 = 2, also ein Widerspruch (oder wir lösen (2) nach t auf, was t = 4 ergibt, also eine andere Lösung als bei (1)). Damit liegen die drei Punkte nicht auf einer Geraden.

3) Wo trifft die Gerade mit der Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf

a) die x-y-Ebene?

Was wir hier berechnen ist einer der drei Spurpunkte (Spurpunkte sind die Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen). Für die x-y- Ebene gilt, dass z = 0 ist. Also setzen wir die z-Komponente der Geradengleichung gleich 0:

$$2 - 2t = 0$$

Es ergibt sich t = 1. Dies setzen wir in g ein und erhalten einen der drei Spurpunkte und hier den Schnittpunkt von g mit der x-y-Ebene S_{xy}:

$$\overrightarrow{0S_{xy}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{xy}(-1; 8; 0)$$

b) Zum Schnittpunkt mit y-z-Ebene: Wir setzen x = 0: -2 + t = 0 ergibt t = 2. In g eingesetzt ergibt sich:

$$\overrightarrow{0S_{yz}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{xy}(0; 12; -2)$$

Für den letzten Spurpunkt, der nicht gesucht wird, müssten wir y = 0 setzten, womit wir S_{xz} bestimmen könnten, den Schnittpunkt mit der x-z-Ebene.

Es gibt auch Geraden, die keinen Schnittpunkt mit z.B. der x-y-Ebene haben, wie

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

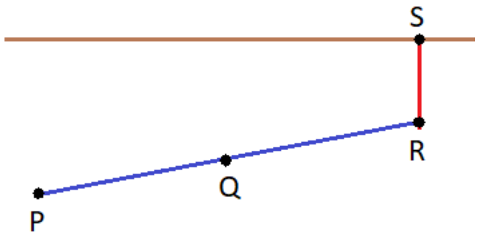
oder Geraden, die komplett in der x-y-Ebene verlaufen, wie z.B.:

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) Es wird ein Schacht in einem Bergwerk vom Punkt P(400;-200;-300) in Richtung des Punkts Q(200;400;-200) gebohrt (alle Angaben in m). Dieser Schacht wird bis zu einer Tiefe von 100m (z = -100) weiter in gerader Richtung fortgeführt.

a) In welchem Punkt R ist dieser Schacht in einer Tiefe von 100m zu Ende?

b) Am Ende des Schachtes soll senkrecht nach oben gebohrt werden. Wie lautet die Gleichung der Geraden auf der dieser Schacht liegt und wo liegt der Punkt S an der Erdoberfläche (z = 0)?



Wir bestimmen die (genau genommen eine mögliche) Gleichung der Geraden durch P und Q:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{0P} + r \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 400 \\ -200 \\ -300 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 200 - 400 \\ 400 + 200 \\ -200 + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ -200 \\ -300 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -200 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Wir setzen die z-Komponente von g auf -100 (also z = -100): -300 + 100r = -100 | + 300
Damit ist 100r = 200 und r = 2. Nun setzen wir r = 2 in g:

$$\overrightarrow{0R} = \begin{pmatrix} 400 \\ -200 \\ -300 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -200 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ -100 \end{pmatrix} \Rightarrow R(0; 1000; -100)$$

b) Wenn es senkrecht nach oben geht, ist der Richtungsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder ein Vielfaches davon (bis auf das $0-$fache): Eine Gleichung der Geraden die durch R verläuft und senkrecht nach oben geht wäre damit gegeben durch:

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{0R} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ -100 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hier wurde mal t als Parameter statt r verwendet, was nicht relevant ist, außer wenn wir Schnittpunkte von zwei Geraden bestimmen sollen. Dann müssten wir bei den beiden Geradengleichungen zwei verschiedene Parameter verwenden (wobei die gewählten Buchstaben für die beiden Parameter dann auch irrelevant wären, sofern sie verschieden sind).

S können wir nun direkt ablesen, es gilt: S(0; 1000; 0). Oder wir setzen z = 0, erhalten t = 100 (aus der Gleichung -100 + t = 0) und setzen t = 100 in h ein.

5) Die Lichtquelle L(0; 0; 20) ist in die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ausgerichtet.

a) Wo trifft der Lichtstrahl auf den Boden (x-y-Ebene)?

Der Lichtstrahl liegt auf der Geraden g: $\vec{x} = \overrightarrow{OL} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Am Boden ist z = 0, womit 20 – 2t = 0 gilt und t = 10. t = 10 in g eingesetzt liefert uns den Punkt S als Schnittpunkt mit der x-y-Ebene:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-20; 10; 0)$$

b) Der Lichtstrahl wird am Boden reflektiert. Es soll eine Gleichung der Gerade bestimmt werden, auf der der Weg des reflektierten Lichtstrahls liegt: Wenn der Lichtstrahl an der x-y-Ebene reflektiert wird, „dreht“ sich das Vorzeichen bei der z-Komponente des Richtungsvektors. Ein Richtungsvektor für den reflektierten Lichtstrahl ist damit durch

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir verwenden den Punkt S als Aufpunkt der Geraden h, die den reflektieren Lichtstrahl beschreibt, bzw. $\overrightarrow{OS}$ als deren Stürzvektor:

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:
Es gibt für eine Gerade theoretisch unendlich viele Möglichkeiten, diese als Parameterform darzustellen. Nehmen wir als Beispiel die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir können ein Vielfaches des Richtungsvektors verwenden, z.B. das Zweifache und erhalten eine weitere Darstellung der gleichen Gerade, z.B.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Oder wir können als Stützvektor auch einen Ortsvektor eines beliebigen Punktes von g verwenden. Setzen wir in die Gerade oben für s = 1 ein, erhalten wir den Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(und A(9; 4; 6) wäre ein Punkt auf der Geraden). Diesen können wir auch als Stützvektor verwenden, womit sich eine weitere Darstellung der gleichen Geraden g ergibt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$