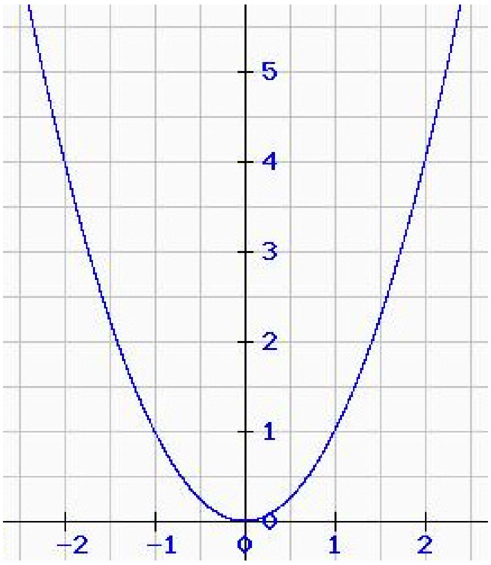
Schnellkurs zur Symmetrie von Funktionen

Wir betrachten den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$:



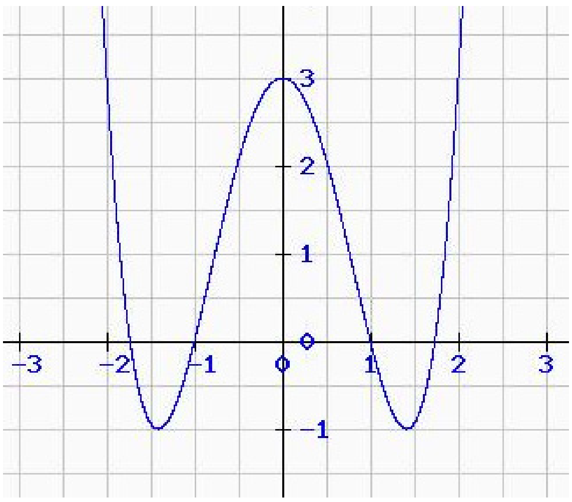
Wir sehen, dass der Graph symmetrisch zur y-Achse ist, die y-Achse stellt die Spiegelachse dar.

Bei dieser Funktion gilt: $f(1) = 1^2 = 1$ und $f(-1) = (-1)^2 = 1$
$f(2) = 2^2 = 4$ und $f(-2) = (-2)^2 = 4$

Das können wir verallgemeinern, denn $f(-x) = (-x)^2 = x^2$. Damit gilt für $f(x) = x^2$: $f(-x) = f(x)$

Erfüllt eine Funktion f die Bedingung **$f(-x) = f(x)$**, dann ist deren Graph zur y-Achse symmetrisch (wir sagen – wie üblich – kurz „die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse“). Der Graph eines Polynoms, welches nur Potenzfunktionen mit geraden Exponenten enthält (also x^2, x^4, …) und eine Konstante a_0, ist achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

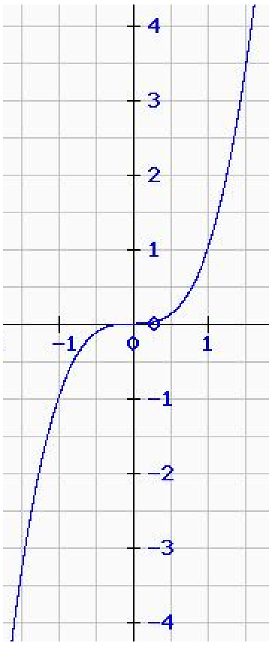
Dies gilt also für $f(x) = x^4 – 4x^2 + 3$:



Dies kann auch schnell formal bewiesen werden, denn es gilt:

$f(-x) = (-x)^4 – 4(-x)^2 + 3 = x^4 – 4x^2 + 3 = f(x)$, womit diese Funktion die Bedingung $f(-x) = f(x)$ erfüllt.

Enthält ein Polynom nur Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten, also x, x^3, x^5, … und folglich keine von Null verschiedene Konstante, dann liegt eine andere Symmetrie vor, die Punktsymmetrie zum Ursprung. Wir betrachten den Graphen der Funktion $f(x) = x^3$:

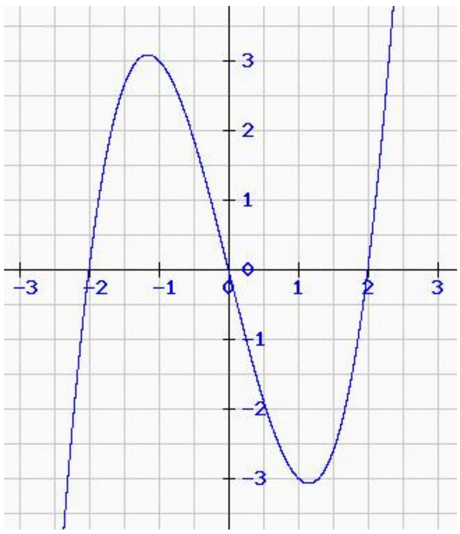


Bei dieser Funktion gilt: $f(1) = 1^3 = 1$ und $f(-1) = (-1)^3 = -1$
$f(2) = 2^3 = 8$ und $f(-2) = (-2)^3 = -8$

Das können wir verallgemeinern, denn $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Damit gilt für $f(x) = x^3$: $f(-x) = -f(x)$

Erfüllt eine Funktion f die Bedingung **$f(-x) = -f(x)$** bzw. **$-f(-x) = f(x)$**, dann ist deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung (hier wird kurz „die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung“ gesagt).

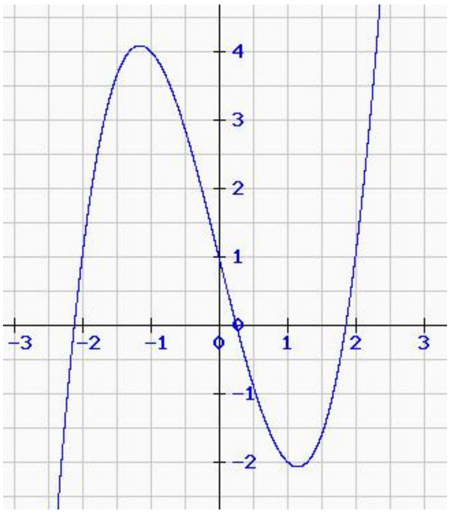
Wir sehen den Graphen der zum Ursprung punktsymmetrischen Funktion $f(x) = x^3 – 4x$:



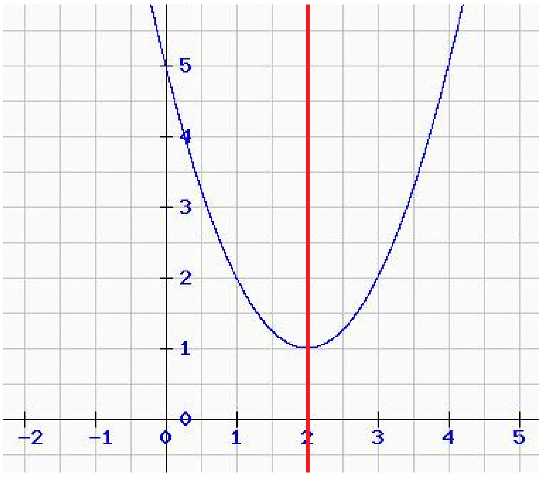
Dies kann auch wieder schnell formal bewiesen werden, denn es gilt:

$f(-x) = (-x)^3 – 4(-x) = -x^3 + 4x = -f(x)$, womit diese Funktion die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ erfüllt.

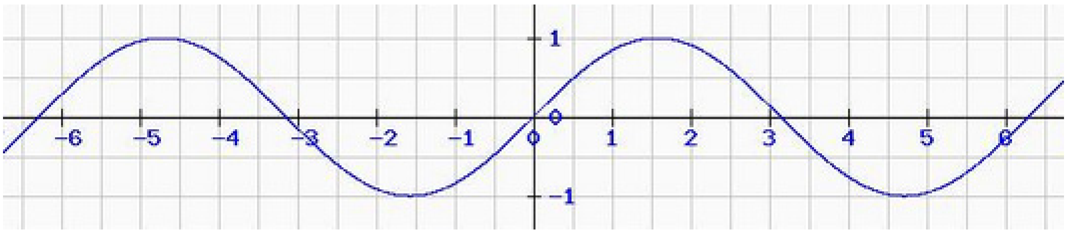
Es gibt noch weitere Symmetriearten. Z.B. wäre $f(x) = x^3 - 4x + 1$ (mit der Konstanten $a_0 = 1$) nicht punktsymmetrisch zum Ursprung, sondern punktsymmetrisch zum Punkt P(0; 1):



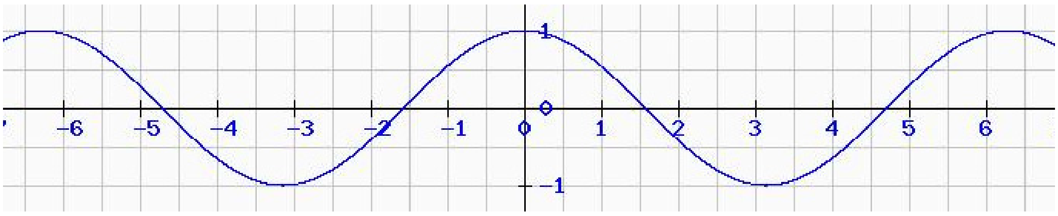
Die Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ besteht aus Potenzfunktionen mit geraden und ungeraden Exponenten und kann somit nicht symmetrisch zur y-Achse sein. Sie hat aber trotzdem eine Symmetrieachse, nämlich x = 2:



Die Sinusfunktion f(x) = sin(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung:



Die Kosinusfunktion f(x) = cos(x) ist achsensymmetrisch zur y-Achse:



Sind zwei Funktionen u und v jeweils achsensymmetrisch zur y-Achse oder jeweils punktsymmetrisch zum Ursprung, so ist das Produkt f(x) = u(x)·v(x) oder der Quotient g(x) = u(x)/v(x) aus diesen Funktionen achsensymmetrisch zur y-Achse.

Beispiele:
f(x) = x·sin(x) oder g(x) = x/sin(x) sind achsensymmetrisch zur y-Achse, da u(x) = x und v(x) = sin(x) beide punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

$f(x) = x^2 \cdot (x^2 + 1)$ oder $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ sind achsensymmetrisch zur y-Achse, da $u(x) = x^2$ und $v(x) = x^2 + 1$ beide achsensymmetrisch zur y-Achse sind.

Ist u achsensymmetrisch zur y-Achse und v punktsymmetrisch zum Ursprung oder umgekehrt, dann ist das Produkt oder der Quotient aus u und v punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiele:
f(x) = x·cos(x) oder g(x) = x/cos(x) sind punktsymmetrisch zum Ursprung, da u(x) = x punktsymmetrisch zum Ursprung ist und v(x) = cos(x) achsensymmetrisch zur y-Achse.

$f(x) = x^3 \cdot (x^2 + 1)$ oder $g(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ sind punktsymmetrisch zum Ursprung, da $u(x) = x^3$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist und $v(x) = x^2 + 1$ achsensymmetrisch zur y-Achse.

Weitere Beispiele:
$f(x) = e^x$ hat keine Symmetrieeigenschaften, aber $f(x) = e^{x^2}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, genauso wie $f(x) = e^x + e^{-x}$, denn $f(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} = e^{-x} + e^x = f(x)$.

$f(x) = x \cdot e^{x^2}$ ist als Produkt einer zum Ursprung punksymmetrischen und zur y-Achse symmetrischen Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

$f(x) = e^x – e^{-x}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn $- f(-x) = -(e^{-x} – e^{-(-x)})= -(e^{-x} – e^x) = e^x – e^{-x} = f(x)$.

Theoretische Bemerkungen:
1) Die Symmetriebedingung für die Symmetrie zur y-Achse oder die Punktsymmetrie zum Ursprung muss theoretisch für alle x aus dem Definitionsbereich D_f der Funktion f erfüllt sein und mit x muss natürlich auch -x im Definitionsbereich liegen.

2) $p_0(x) = a_0$ ist ein Polynom nullten Grades. $p_1(x) = a_1x + a_0$ ist ein Polynom ersten Grades, wie z.B. f(x) = 2x + 3 (a_1 = 2 und a_0 = 3). $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ist ein Polynom zweiten Grades, wie z.B. $f(x) = x^2$ (mit a_2 = 1, a_1 = 0 und a_0 = 0) oder $g(x) = -x^2 + 4x + 5$ (mit a_2 = -1, a_1 = 4 und a_0 = 5). Eine Potenzfunktion n-ten Grades ist $f(x) = x^n$. Theoretisch kann n ganzzahlig sein (oder ganz allgemein sogar reell). Z.B. ist $f(x) = x^{-2}$ eine Potenzfunktion, die symmetrisch zur y-Achse ist (siehe http://mathe-total.de/Graphen/Potenz/Potenzfunktionen.php). Polynome setzten sich also aus Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten n (also aus x, x^2, x^3, …) und einer Konstanten a_0 zusammen, d.h. sie ergeben sich als Summe aus der Linearkombination dieser Potenzfunktionen und a_0. Einfacher wäre es, nur Linearkombination aus Potenzfunktionen mit nichtnegativen ganzzahligen Exponenten n (d.h. x^0, x^1, x^2, …) zu sagen, was aber problematisch ist, da dieses Polynom dann an der Stelle 0 wegen 0^0 nicht definiert wäre.