Lagebeziehungen von Gerade/Ebene und Ebene/Ebene

Gerade/Ebene:

1) Wie ist die Lage der Gerade und der Ebene zueinander?

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E: 2x + y + 4z = 13$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E: x - 2y + z = 5$

2) Wie muss a gewählt werden, damit $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt?

Lösungen:

1)a Mit der Geradengleichung ergibt sich:

$x = 1 + t$
$y = 2 - t$
$z = 1 + t$

in E einsetzen: $2 \cdot (1 + t) + 2 - t + 4 \cdot (1 + t) = 13$

$2 + 2t + 2 - t + 4 + 4t = 13$

$8 + 5t = 13 \mid -8$

$5t = 5 \mid :5$

$t = 1$

Es gibt genau einen Schnittpunkt. Wenn man diesen bestimmen möchte, muss man t = 1 in g einsetzen ($\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S(2|1|2)$)

b)

$x = 2 + 2t$
$y = 1 + t$
$z = 3$

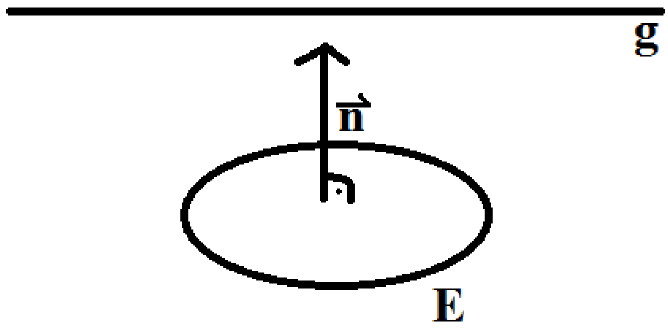
in E einsetzen: $2 + 2t - 2 \cdot (1 + t) + 3 = 5$

$2 + 2t - 2 - 2t + 3 = 5$

$3 = 5$

$\Rightarrow$ parallel

Bemerkung: Hier ist der Normalenvektor von E, d.h. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, senkrecht zum Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden g ($\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).



$g \perp E \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

2) Man könnte hier gleichsetzen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Einfacher ist es, wenn man E in Koordinatenform umwandelt (siehe http://mathe-total.de/LA-Skript/AG-Ebenen.pdf ab S. 4):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Schema für das Kreuzprodukt:

$$\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 3 \\ 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2 \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -7 \end{array}$$

E: $3x + 2y - 7z = d$

Stützpunkt P (Stützvektor von E: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$) in Gleichung einsetzen.

$3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 7 \cdot 2 = d$
$-9 = d$

E: $3x + 2y - 7z = -9$

g in E einsetzen:

$x = 2 + 4t$
$y = a + t$
$z = 1 + 2t$

$3 \cdot (2 + 4t) + 2 \cdot (a + t) - 7 \cdot (1 + 2t) = -9$

$6 + 12t + 2a + 2t - 7 - 14t = -9$ (1)

$2a - 1 = -9 \mid +1$ (t fällt weg, deshalb parallel)

$2a = -8 \mid :2$

$a = -4$

Für a = -4 liegt g in E.

Hier würde sich dann bei (1) -9 = -9 ergeben.

Ebene / Ebene:

Wie ist die Lage der Ebenen zueinander?

3) a) E_1: $x + 2y + 3z = 4$

E_2: $2x + 4y + 6z = 10$

E_3: $-x - 2y - 3z = -4$

b) E_1: $x + y - 2z = 4$

E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) E_1: $x + y - z = 4$

E_2: $x + y + z = 2$

Lösung:

3a) E_1 ist parallel zu E_2 (Normalvektoren sind Vielfache: $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$).

Multipliziert man die Gleichungen von E_1 mit 2 ergibt sich $2x + 4y + 6z = 8$. Hier stimmt die rechte Seite nicht überein, also parallel und nicht identisch.

E_1 und E_3 sind identisch (Gleichung von E_1 mit (-1) multipliziert ergibt die von E_3).

b) Aus E_2 ergibt sich $x = 1 + 2r + s$ (I)

$y = 1 + r + 2s$ (II)

$z = 1 + r - s$ (III)

In E_1 einsetzen: $1 + 2r + s + 1 + r + 2s - 2 \cdot (1 + r - s) = 4$

$1 + 2r + s + 1 + r + 2s - 2 - 2r + 2s = 4 \quad \Leftrightarrow \quad r + 5s = 4$

Es gibt somit eine Schnittgerade (für z.B. 4 = 4 wären die Ebenen identisch und für z.B. 5 = 4 parallel), denn es fallen nicht beide Parameter (hier r und s) weg.

Möchte man die Schnittgerade bestimmen, muss man nach r oder s auflösen und in die Gleichung von E_2 einsetzen (man könnte auch in die Komponenten (I) bis (III) einsetzen).

Wir lösen nach r auf: $r = 4 - 5s$

In E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (4 - 5s) \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - 5s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-10\\-5\\-5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}9\\5\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-9\\-3\\-6\end{pmatrix}$ ist eine Gleichung der Schnittgerade.

c) E_1 und E_2 sind nicht parallel und auch nicht identisch, denn die Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sind weder identisch noch Vielfache.

Möchte man die Schnittgerade bestimmen, kann man eine Variable (hier z.B. z) eliminieren.

$x + y - z = 4$
$x + y + z = 2$
$\underline{}$ $+$
$2x + 2y = 6$

Nun kann man x oder y auf r (oder auf s oder t …) setzen.

Wir setzen $y = r$:

$2x + 2r = 6$
$2x = 6 - 2r$
$x = 3 - r$

In E_1 (oder E_2) einsetzen:
$3 - r + r - z = 4$
$3 - z = 4 \quad | -3$
$-z = 1 \quad | \cdot(-1)$
$z = -1$

Eine Gleichung der Schnittgerade g:

$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ (da $x = 3 - r$, $y = r$ und $z = -1$ ist.)