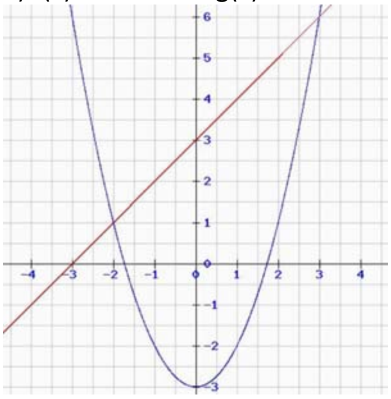
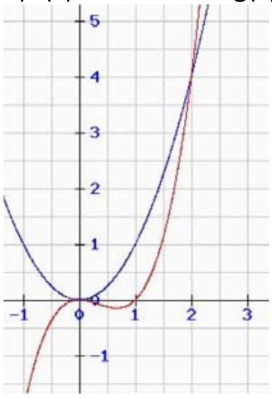
Flächenberechnung (mit Polynomen)

1) Gesucht wird die Fläche zwischen den beiden Kurven von f und g:

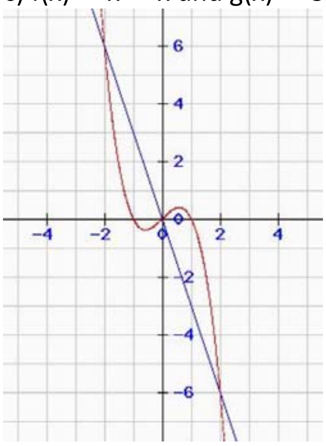
a) $f(x) = x + 3$ und $g(x) = x^2 - 3$:



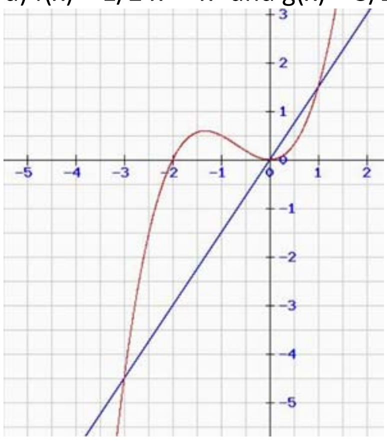
b) $f(x) = x^3 - x^2$ und $g(x) = x^2$:



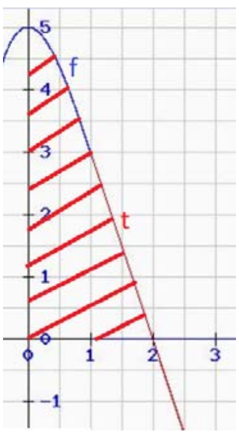
c) $f(x) = -x^3 + x$ und $g(x) = -3x$:



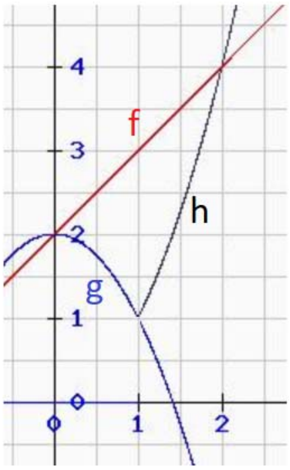
d) $f(x) = 1/2 \cdot x^3 + x^2$ und $g(x) = 3/2 \cdot x$:



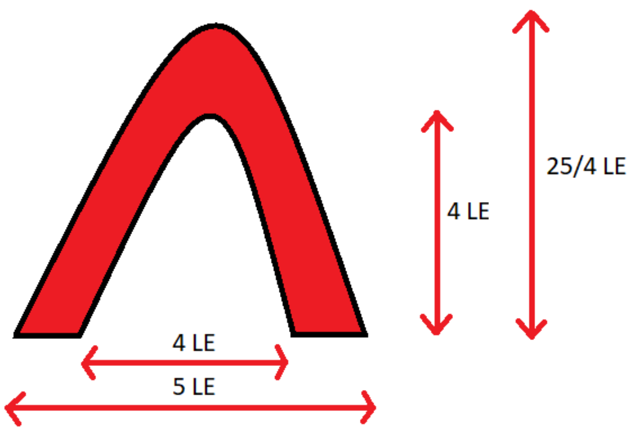
2) Gesucht wir die Fläche, die zu einem Teil zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ und der x-Achse über dem Intervall $I_1 = [0; 1]$ und zum anderen Teil zwischen der Tangente von f an der Stelle x = 1 (Lösung: $t(x) = -3x + 6$) und der x-Achse über dem Intervall $I_2 = [1; 2]$ liegt.

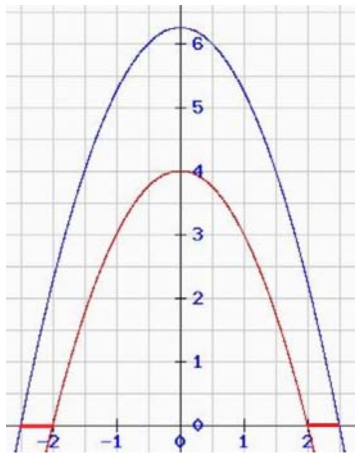


3) Gesucht wird die Fläche, die die Graphen von $f(x) = x + 2$, $g(x) = -x^2 + 2$ und $h(x) = x^2$ über dem Intervall $I = [0; 2]$ gemeinsam einschließen. Relevante Schnittstellen sind $x = 0$ zwischen f und g, $x = 1$ zwischen g und h und $x = 2$ zwischen f und h.



4) Gesucht wird eine Fläche, die über dem Intervall $I = [-2; 2]$ gemeinsam von den Graphen von $f(x) = -x^2 + 25/4$ und $g(x) = -x^2 + 4$ eingeschlossen wird und über den Intervallen $I_1 = [-5/2; -2]$ und $I_2 = [2; 5/2]$ von dem Graph von f und der x-Achse. Diese Fläche wird unten links schematisch dargestellt und rechts mit den zugehörigen Funktionsgraphen.





Lösungen:

1) a) $f(x) = x + 3$ und $g(x) = x^2 – 3$, Schnittstellen sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ und der Graph von f liegt im Inneren des relevanten Intervalls über dem von g (d.h. $f(x) > g(x)$ für $-2 < x < 3$) :

$$\int_{-2}^{3}(f(x) - g(x))dx = \int_{-2}^{3}(x + 3 - (x^2 - 3))dx = \int_{-2}^{3}(-x^2 + x + 6)dx$$

$$= [-1/3\cdot x^3 + 1/2 \cdot x^2 + 6x]_{-2}^{3}$$

$$= -1/3\cdot 3^3 + 1/2\cdot 3^2 + 6\cdot 3 - (-1/3\cdot(-2)^3 + 1/2\cdot (-2)^2 + 6\cdot(-2)) = 125/6 \text{ (FE)}$$

Bemerkung:
Sollen die Schnittstellen berechnet werden, ergeben sich diese durch:
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x + 3 = x^2 – 3 \Leftrightarrow 0 = x^2 – x – 6$
Die p-q-Formel (http://mathe-total.de/new15/p-q-Formel.pdf) liefert dann die beiden Schnittstellen (hier nur in anderer Reihenfolge: $x_1 = 3$ und $x_2 = -2$).

b) $f(x) = x^3 – x^2$ und $g(x) = x^2$, Schnittstellen sind $x_{1/2} = 0$ (ist sogar eine Berührstelle) und $x_3 = 2$ und der Graph von g liegt im Inneren des Integrationsintervalls über dem von f (es könnte unten auch über $f(x) – g(x)$ integriert werden, bei der Verwendung von Betragsstrichen):

NR: $g(x) – f(x) = x^2 – (x^3 – x^2) = x^2 – x^3 + x^2 = -x^3 + 2x^2$

$$A = \int_{0}^{2}(g(x) - f(x))dx = \int_{0}^{2}(-x^3 + 2x^2)dx$$

$$= [-1/4\cdot x^4 + 2/3 \cdot x^3]_{0}^{2}$$

$$= -1/4\cdot 2^4 + 2/3\cdot 2^3 – 0 = 4/3 \text{ (FE)}$$

Bemerkung:
Sollen die Schnittstellen berechnet werden, ergeben sich diese durch:
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 – x^2 = x^2 \Leftrightarrow 0 = x^3 – 2x^2$

Auf der rechten Seite der Gleichung sehen wir $f(x) – g(x)$ (das Negative von $g(x) – f(x)$) stehen.
Hier können wir ausklammern:

$x^3 – 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x – 2) = 0$

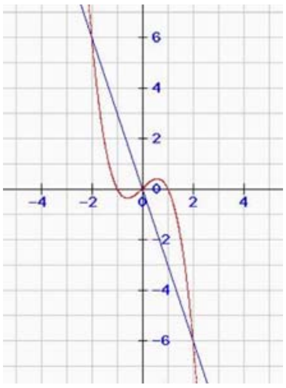
Damit ergibt sich $x_{1/2} = 0$ und $x_3 = 2$, durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren. Aufgaben zum Lösen von Polynomgleichungen sind hier: http://mathe-total.de/new/Nullstellen-Polynome.pdf

c) $f(x) = -x^3 + x$ und $g(x) = -3x$, Schnittstellen in sortierter Reihenfolge sind $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. Wir benötigen somit zwei Integrale, außer es wird die Symmetrie von $f(x) – g(x)$ berücksichtig (beide Teilflächen sind gleich groß, da die Differenzfunktion, wie hier sogar auch die einzelnen Funktionen, punktsymmetrisch zum Ursprung sind):

NR: $g(x) – f(x) = -3x – (-x^3 + x) = x^3 - 4x$

Für die Berechnung von A_1, bzw. für x aus dem Integrationsintervall [-2; 0], ist zu beachten, dass $g(x) \geq f(x)$ gilt, da im Inneren des Intervalls der Graph von g über dem Graph von f liegt. Hier könnten wir $g(x) – f(x) = x^3 - 4x$ als Integrand verwenden. Mit dem Integranden $f(x) – g(x) = -x^3 + 4x$ würde das

Integral einen negativen Wert annehmen, wobei hier dann einfach Betragsstiche gesetzt werden können.



Also:

$A_1 = \left|\int_{-2}^{0}(f(x) - g(x))dx\right|$ oder

$A_1 = \int_{-2}^{0}(g(x) - f(x))dx = \int_{0}^{2}(x^3 - 4x)dx = [\,1/4 \cdot x^4 - 2x^2]_{-2}^{0}$

$= 0 - (1/4 \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2) = 4$ (FE)

Aus Symmetriegründen ist $A_2 = A_1 = 4$ (FE)

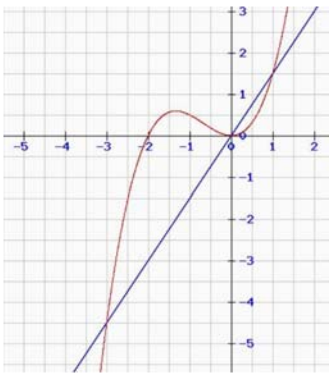
Oder: $A_2 = \int_{0}^{2}(f(x) - g(x))dx = \int_{0}^{2}(-x^3 + 4x)dx$

$= [\,-1/4 \cdot x^4 + 2x^2]_{0}^{2}$

$= -1/4 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 0 = 4$ (FE)

$A = A_1 + A_2 = 8$ (FE)

d) $f(x) = 1/2 \cdot x^3 + x^2$ und $g(x) = 3/2 \cdot x$, Schnittstellen in sortierter Reihenfolge sind $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Wir benötigen somit zwei Integrale:



NR: $f(x) - g(x) = 1/2 \cdot x^3 + x^2 - 3/2 \cdot x$

$A_1 = \int_{-3}^{0}(f(x) - g(x))dx = \int_{-3}^{0}(1/2 \cdot x^3 + x^2 - 3/2 \cdot x)dx$

$= [\,1/2 \cdot 1/4 \cdot x^4 + 1/3 \cdot x^3 - 3/2 \cdot 1/2 \cdot x^2]_{-3}^{0}$

$= [\, 1/8 \cdot x^4 + 1/3 \cdot x^3 - 3/4 \cdot x^2]_{-3}^{0}$

$= 0 - (1/8 \cdot (-3)^4 + 1/3 \cdot (-3)^3 - 3/4 \cdot (-3)^2) = 45/8 = 5{,}625$ (FE)

Statt über g(x) – f(x) zu integrieren, verwenden wir hier - zur Veranschaulichung -, die Betragsstriche:

$A_2 = \left|\int_0^1 (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_0^1 (1/2 \cdot x^3 + x^2 - 3/2 \cdot x)dx\right|$

$= |\, [\, 1/8 \cdot x^4 + 1/3 \cdot x^3 - 3/4 \cdot x^2]_0^1 \,|$

$= |1/8 + 1/3 - 3/4 - 0\,| = |\, -7/24 \,| = 7/24$ (FE)

$A = A_1 + A_2 = 71/12$ (FE) $\approx 5{,}917$ (FE)

2) Gesucht wir die Fläche, die zu einem Teil zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ und der x-Achse über dem Intervall $I_1 = [0; 1]$ und zum anderen Teil zwischen der Tangente von f an der Stelle x = 1 (Lösung: t(x) = -3x + 6) und der x-Achse über dem Intervall $I_2 = [1; 2]$ liegt.
Bestimmung der Gleichung der Tangente von f an der Stelle x = 1:
Allgemein gilt für die Gleichung der Tangenten t an der Stelle $x = x_0$: $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
(Siehe Lösung Aufgabe 4 unter http://mathe-total.de/Analysis-Aufgaben/Differentialrechnung.pdf.)

$f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(1) = 3 - 6 = -3$, $f(1) = 1 - 3 + 5 = 3$, womit $t(x) = -3(x - 1) + 3 = -3x + 6$ ist.

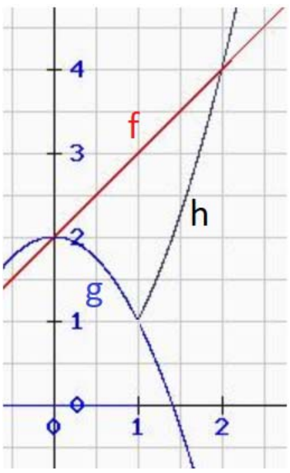
$A_1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 5)dx = [\, 1/4 \cdot x^4 - x^3 + 5x]_0^1 = 1/4 - 1 + 5 - 0 = 17/4$ (FE)

$A_2 = \int_1^2 t(x)dx = \int_1^2 (-3x + 6)dx = [\, -3/2 \cdot x^2 + 6x]_1^2 = -3/2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - (-3/2 + 6) = 3/2$ (FE)

$A = A_1 + A_2 = 23/4$ (FE) $= 5{,}75$ (FE)

3) Gesucht wird die Fläche, die die Graphen von f(x) = x + 2, $g(x) = -x^2 + 2$ und $h(x) = x^2$ über dem Intervall I = [0; 2] gemeinsam einschließen. Relevante Schnittstellen sind x = 0 zwischen f und g, x = 1 zwischen g und h und x = 2 zwischen f und h.

Über dem Intervall [0; 1] wird die Fläche durch den Graphen von f von oben und durch den Graphen g von unten begrenzt. Über dem Intervall von [1; 2] wird die Fläche ebenfalls von oben durch den Graphen von f, aber von unten durch den Graphen von h begrenzt:



$f(x) - g(x) = x^2 + x$, $f(x) - h(x) = -x^2 + x + 2$

$A_1 = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx = 5/6$ (FE)

$A_2 = \int_1^2 (f(x) - h(x))dx = 7/6$ (FE)

$A = A_1 + A_2 = 2$ (FE)

4) Gesucht wird eine Fläche, die über dem Intervall I = [-2; 2] von den Graphen von $f(x) = -x^2 + 25/4$ und $g(x) = -x^2 + 4$ eingeschlossen wird und über den Intervallen I_1 = [-5/2; -2] und I_2 = [2; 5/2] von dem Graph von f und der x-Achse.

$A_1 = \int_{-5/2}^{-2} f(x)dx = \int_{-5/2}^{-2}(-x^2 + 25/4)dx = [\,-1/3\cdot x^3 + 25/4\cdot x\,]_{-5/2}^{-2}$

$= -1/3\cdot(-2)^3 + 25/4\cdot(-2) - (-1/3\cdot(-5/2)^3 + 25/4\cdot(-5/2))$

$= 7/12$ (FE)

NR: $f(x) - g(x) = -x^2 + 25/4 - (-x^2 + 4) = 9/4$

$A_2 = \int_{-2}^{2}(f(x) - g(x))dx = \int_{-2}^{2} 9/4dx = [\,9/4\cdot x]_{-2}^{2} = 9/4\cdot 2 - (9/4\cdot(-2)) = 9$ (FE)

$A_3 = A_1 = \int_{2}^{5/2} f(x)dx = \int_{2}^{5/2}(-x^2 + 25/4)dx = [\,-1/3\cdot x^3 + 25/4\cdot x\,]_{2}^{5/2}$

$= -1/3\cdot(5/2)^3 + 25/4\cdot 5/2 - (-1/3\cdot 2^3 + 25/4\cdot 2)$

$= 7/12$ (FE)

$A = A1 + A2 + A3 = 61/6$ (FE) $\approx 10{,}17$ (FE)

Einfachere Lösung:
Wir berechnen die Fläche, die der Graph von f über dem Intervall [-5/2; 5/2] einschließt und dann die Fläche, die der Graph von g über dem Intervall von [-2; 2] einschließt. Die Differenz der beiden Flächen ist die gesucht Fläche:

$A_f = \int_{-5/2}^{5/2} f(x)dx = \int_{-5/2}^{5/2}(-x^2 + 25/4)dx = [\,-1/3\cdot x^3 + 25/4\cdot x\,]_{-5/2}^{5/2}$

$= -1/3\cdot(5/2)^3 + 25/4\cdot 5/2 - (-1/3\cdot(-5/2)^3 + 25/4\cdot(-5/2))$

$= 125/6$ (FE)

$A_g = \int_{-2}^{2} g(x)dx = \int_{-2}^{2}(-x^2 + 4)dx = [\,-1/3\cdot x^3 + 4\cdot x\,]_{-2}^{2}$

$= -1/3\cdot 2^3 + 4\cdot 2 - (-1/3\cdot(-2)^3 + 25/4\cdot(-2))$

$= 32/3$ (FE)

$A = A_f - A_g = 61/6$ (FE)

Theoretisch hätten wir auch (wegen der Symmetrie zur y-Achse)

$$A = 2\cdot\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx - 2\cdot\int_0^{2} g(x)dx$$

berechnen können.