Aufgaben Exponentialfunktion

Wir gehen hier von der Form $f(x)=b\cdot a^x$ für die Exponentialfunktion aus. In der Oberstufe wird hierfür oft $f(x) = b \cdot e^{kx}$ geschrieben mit der Euler'schen Zahl e. Dann wäre hier $k = \ln(a)$ oder $a = e^k$.

Aufgaben:

1) Am Anfang gab es 1000 Bakterien in einer Probe. Nach 3 Minuten waren es 3375 Bakterien.
a) Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion für die Zuordnung: Zeit in Minuten → Anzahl Bakterien?
b) Wie viele Bakterien sind es nach diesen Modell in 10 Minuten?

2) Luna hat 2000€ auf einem Konto angelegt. Die Bank zahlt 1,5% Zinsen.
a) Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion (Zeit in Jahren → Kontostand), wenn auch für die Zinsen in den folgenden Jahren Zinsen gezahlt werden (Zinseszins)?
b) Wie viel Geld hat Sie in 4 Jahren auf dem Konto?
c) Wann sind es 2252,99€?

3) Der Akku eines Smartphones verliert im Betrieb pro Tag 20% an Leistung. Wie viel Leistung hat er nach 10 Tagen verloren?

4) 10 Schülerinnen/Schüler kennen ein Gerücht. Die Anzahl der Schülerinnen/Schüler, die das Gerücht kennen, verdreifacht sich pro Tag. Wann kennt es die ganze Schule mit 810 Schülerinnen und Schülern?

5) 2010 hatten 1 Millionen Personen das Smartphone X. Im Jahr 2014 waren es 2,0736 Millionen. Wie viele werden es im Jahr 2020 sein?

6) Tamara hat ein neues Auto gekauft. Nach 2 Jahren ist dieses noch 28900€ wert und nach 5 Jahren noch 17748,21€.
   a) Wie viel hat dieses beim Kauf gekostet?
   b) Wie viel ist es noch in 10 Jahren wert?

Lösung

1) a)

$f(x) = a \cdot b^x$

$f(0) = a \cdot b^0 = 1000$

$\Rightarrow a = 1000 \qquad (\text{da } b^0 = 1)$

$f(3) = a \cdot b^3 = 3375\ (1)$

Wir setzen a = 1000 in (1) ein: $1000 \cdot b^3 = 3375 \quad |: 1000$

$b^3 = 3{,}375 \quad | \sqrt[3]{}$

$b = 1{,}5$

Also: $f(x) = 1000 \cdot 1{,}5^x$

a) $f(10) = 1000 \cdot 1{,}5^{10} \approx 57665$

Also sind es nach 10 Minuten ca. 57665 Bakterien.

2) a) Hier ist a= 2000 (Anfangswert) und b=1,015 = 1+ Zinssatz/100, denn nach einem Jahr hätte sie

$2000 + 2000 \cdot \frac{1{,}5}{100} = 2000 \cdot \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right)$

$= 2000 \cdot 1{,}015 = 2030€$.

Also: $f(x) = 2000 \cdot 1{,}015^x$

b) $f(4) = 2000 \cdot 1{,}015^4 \approx 2122{,}73€$

c) x=? $f(x) = 2252{,}99$

$2000 \cdot 1{,}015^x = 2252{,}99 \quad |: 2000$

$1{,}015^x = 1{,}126495 \ldots . (\text{Ergebnis im Taschenrechner lassen})$

$1{,}015^x = 1{,}126495 \ldots \quad | \log_{1{,}015}(\,)$

$x = \log_{1{,}015}(1{,}126495 \ldots) \approx 8, \text{also ca. } 8 \text{ Jahre.}$

3) a = 100 (Wir setzen a auf 100%, man hätte auch a = 1 setzen können).

$b = 1 - \frac{\text{prozenutaler Verlust}}{100} = 1 - \frac{20}{100} = 0{,}8$

$f(x) = 100 \cdot 0{,}8^x$

Nach 10 Tagen: $f(10) \approx 10{,}74$

Damit sind nach 10 Tagen noch ca. 10,74% Restleistung vorhanden:

Verlust ≈ 100% - 10,74% = 89,26%

4) $a = 10$

$b = 3$

$f(x) = 100 \cdot 3^x$

$10 \cdot 3^x = 810 \quad | : 10$

$3^x = 81 \quad | \log_3 (\,)$ $\qquad x = \log_3 \; (81) = 4$

5) Wir wählen 2010 als Jahr $0 (x = 0)$, damit ist 2014 das Jahr 4. b = 1 (Mio.)

$f(x) = 1 \cdot a^x = a^x$

$f(4) = a^4 = 2{,}0736 \quad |\sqrt[4]{\;}$

$a = 1{,}2$ (hier darf man nur die positive Lösung verwenden)

$f(x) = 1{,}2^x$

Das Jahr 2020 ist das Jahr 10.

$f(10) = 1{,}2^{10} \approx 6{,}19$ (Mio.)

6) $f(x) = b \cdot a^x$

$f(2) = b \cdot a^2 = 28900$ (1)
$f(5) = b \cdot a^5 = 17748{,}21$ (2)

Wir lösen (1) nach b auf:

$b \cdot a^2 = 28900 \;\; | \;\; : a^2$

$b = 28900/a^2$ (3)

Dies setzen wir in (2) ein: $\frac{28900}{a^2} \cdot a^5 = 17748{,}21$

$28900 \cdot a^3 = 17748{,}21$ (da $a^n/a^m = a^{n-m}$ ist)

$a^3 = 17748{,}21/28900 \;\; | \;\; \sqrt[3]{\;}$

$a \approx 0{,}85$ Setzt man dies in (3) ein, ergibt sich $b \approx 28900/0{,}85^2 = 40000$

Damit ist $f(x) = 40000 \cdot 0{,}85^x$ und der Anfangspreis beträgt 40000€ (Antwort zu a)).

b) $f(10) = 40000 \cdot 0{,}85^{10} \approx 7874{,}98$, womit das Auto nach 10 Jahren noch ca. 7874,98€ wert ist.