© www.mathe-total.de

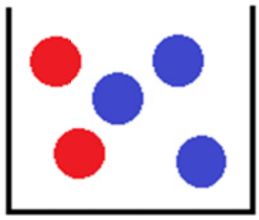
Berechnung von Wahrscheinlichkeiten beim Ziehen mit und ohne Zurücklegen

Ziehen mit Zurücklegen

Wir betrachten folgendes Beispiel: In einer Urne sind 2 rote und 3 blaue Kugeln. Wenn man hier eine Kugel zieht, dann ist die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel

$$P(\text{rot}) = \frac{2}{5},$$

denn von 5 Kugeln sind 2 rot.



Hier wird angenommen, dass jede Kugel mit derselben Wahrscheinlichkeit aushilft. Die Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel ist dann

$$P(\text{blau}) = \frac{3}{5}.$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für „rot“ $\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$ und für „blau“ $\frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$. Um auf den Prozentwert zu kommen, muss man den Dezimalbruch mit 100 multiplizieren.

Die Summe über alle Wahrscheinlichkeiten beträgt hier 1 oder 100% (da sich die Ereignisse gegenseitig ausschließen).

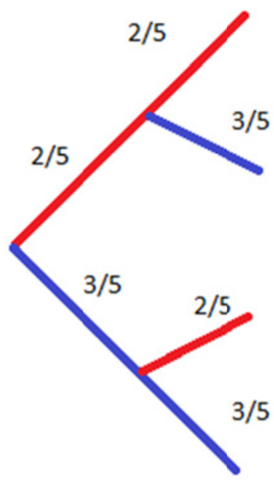
Legt man die gezogene Kugel zurück und zieht noch einmal, dann ändert sich die Wahrscheinlichkeit im zweiten Zug nicht. D.h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine blaue Kugel im 2. Zug gezogen wird, beträgt wieder $\frac{3}{5}$.

Zieht man 2-mal mit zurücklegen, gibt es insgesamt 4 mögliche Ergebnisse:

- rot, rot
- rot, blau
- blau, rot
- blau, blau

Diese kann man in einem **Baum** darstellen.

© www.mathe-total.de



Möchte man nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass man 2-mal hintereinander „rot“ zieht (P(rot, rot)), dann muss man die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für „rot“ beim jeweiligen Ziehen multiplizieren:

$$P(\text{rot, rot}) = P(\text{rot}) \cdot P(\text{rot})$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

Oder 4/25 = 0,16 = 16%.

Man muss also die Wahrscheinlichkeit entlang eines Pfades (der Äste) multiplizieren.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man erst eine rote Kugel und dann eine blaue Kugel zieht, beträgt:

$$P(\text{rot, blau}) = P(\text{rot}) \cdot P(\text{blau})$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24 = 24\%$$

Dieselbe Wahrscheinlichkeit erhält man für „blau“ im 1. Zug und „rot“ im 2. Zug:

$$P(\text{blau, rot}) = P(\text{blau}) \cdot P(\text{rot})$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24 = 24\%$$

Für die letzte Wahrscheinlichkeit, d.h. hierfür (blau blau), bleiben damit noch 100% -16% - 24% = 36%, denn die Summe über die Wahrscheinlichkeiten aller dieser Ereignisse beträgt 100% (bzw. 1). Man kann aber auch folgendes berechnen:

$$P(\text{blau, blau}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0{,}36 = 36\%.$$

Damit gilt:

Ereignisse	Wahrscheinlichkeit
rot, rot	0,16
rot, blau	0,24
blau, rot	0,24
blau, blau	0,36

© www.mathe-total.de

Nun kann man die Wahrscheinlichkeit für genau eine rote Kugel bestimmen:

Für genau eine rote Kugel gibt es 2 Möglichkeiten: rot, blau oder blau, rot. Gibt es mehrere Möglichkeiten bzw. Pfade, dann muss man die Wahrscheinlichkeit addieren (+). Dies ist möglich, da es sich hier um Elementarereignisse handelt, die sich gegenseitig ausschließen.

$$P(\text{genau eine rote Kugel}) = P(\text{rot, blau}) + P(\text{blau, rot})$$

$$= 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}48 = 48\%$$

Wir können auch die Wahrscheinlichkeit für keine rote Kugel berechnen:

$$P(\text{keine rote Kugel}) = P(\text{blau, blau}) = 0{,}36 = 36\%$$

Hier werden die Wahrscheinlichkeiten in einer Tabelle dargestellt:

Anzahl roter Kugeln	Wahrscheinlichkeit
0	0,36
1	0,48
2	0,16

Nun kann man aber auch die Wahrscheinlichkeit für höchstens eine rote Kugel berechnen:

$$P(\text{höchstens eine rote Kugel}) = P(\text{keine rote Kugel}) + P(\text{genau eine rote Kugel})$$
$$= 0{,}36 + 0{,}48 = 0{,}84 = 84\%$$

Oder, wenn man noch nicht die Wahrscheinlichkeit für genau eine rote Kugel kennt, müsste man P(blau, blau) + P(rot, blau) + P(blau, rot) berechnen, wobei

$$P(\text{blau, blau}) = P(\text{blau}) \cdot P(\text{rot}), \text{ u.s.w.}$$

wäre.

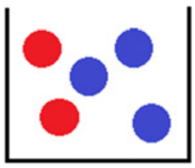
Die Summe über alle Wahrscheinlichkeiten beträgt wieder 1. Damit hätte man die Wahrscheinlichkeit für „höchstens eine rote Kugel“ auch über die Gegenwahrscheinlichkeit berechnen könne, d.h. über die Wahrscheinlichkeit für „keine zwei rote Kugeln“ (denn es gibt nur die Möglichkeiten „keine rote Kugel“, „genau eine rote Kugel“ und „genau zwei rote Kugeln“).

$$P(\text{höchstens eine rote Kugel}) = 1 - P(\text{genau zwei rote Kugeln})$$

$$= 1 - 0{,}16 = 0{,}84$$

Ziehen ohne Zurücklegen

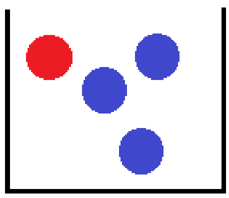
Zieht man ohne Zurücklegen, dann ändern sich nach jedem Zug die Wahrscheinlichkeiten, aber die Methode der Berechnung ändert sich nicht (d.h. entlang eines Pfades wird multipliziert, gibt es mehrere in Frage kommende Pfade, dann wird später addiert). Wir betrachten wieder die Urne mit den 2 roten und 3 blauen Kugeln:



Die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel beim 1.Zug ist wie beim Ziehen mit zunächst $\frac{2}{5}$, so wie auch für „blau“ $\frac{3}{5}$:

$$P(\text{rot}) = \frac{2}{5} \text{ und } P(\text{blau}) = \frac{3}{5}$$

Hat man im ersten Zug eine rote Kugel gezogen, dann sind nun aber nur noch 4 Kugeln in der Urne, wobei nur noch eine rot ist.



Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass man im 2. Zug eine rote Kugel zieht:

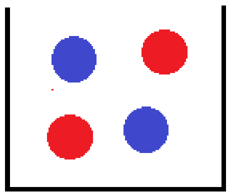
$$P(\text{„rot“ im 2. Zug, wenn im ersten Zug eine rote Kugel gezogen wurde}) = \frac{1}{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man im 2. Zug eine blaue Kugel zieht, wäre dann:

$$P(\text{„blau“ im 2. Zug, wenn im ersten Zug eine rote Kugel gezogen wurde}) = \frac{3}{4}$$

Hier hängt also die Wahrscheinlichkeit für die Farbe im zweiten Zug davon ab, was im ersten Zug gezogen wurde. Hat man nun im 1. Zug eine blaue Kugel gezogen, dann sind vor dem 2. Zug noch 2 rote und 2 blaue Kugeln in der Urne:

© www.mathe-total.de



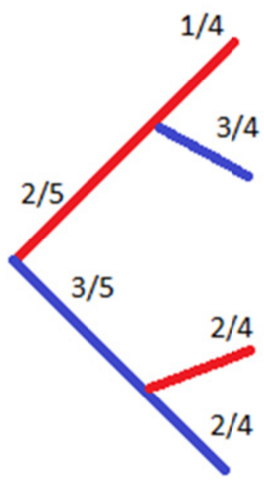
In diesem Fall beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel im 2. Zug:

$$P(\text{„rot" im 2. Zug, wenn im 1. Zug eine blaue Kugel gezogen wurde}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Und die Wahrscheinlichkeit, für eine blaue Kugel im 2 .Zug:

$$P(\text{„blau" im 2.Zug, wenn im 1. Zug eine blaue Kugel gezogen wurde}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Der **Baum:**



Die Wahrscheinlichkeit, für 2 rote Kugeln berechnet sich jetzt aber wieder wie beim Ziehen mit Zurücklegen (nur eben mit den anderen Wahrscheinlichkeiten ab dem zweiten Zug):

$$P(\text{rot, rot}) = P(\text{„rot" im 1. Zug}) \cdot P(\text{„rot" im 2. Zug, wo im ersten Zug „rot" gezogen wurde})$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$$

Analog erhält man nun:

$$P(\text{rot, blau}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = 0{,}3 = 30\%$$

$$P(\text{blau, rot}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0{,}3 = 30\%$$

$$P(\text{blau, blau}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{10} = 0{,}3 = 30\%$$

Damit ergibt sich die Tabelle:

Ereignisse	Wahrscheinlichkeit
rot, rot	0,10
rot, blau	0,30
blau, rot	0,30
blau, blau	0,30

Die Wahrscheinlichkeit für genau eine rote Kugel beträgt dann

P(genau eine rote Kugel) = P(rot, blau) + P(blau, rot) = 0,3 + 0,3 = 0,6 = 60%.

Die Wahrscheinlichkeit für genau 2 rote Kugeln beträgt dann

P(genau 2 rote Kugeln) = P(rot, rot) = 0,1 = 10%

und die Wahrscheinlichkeit für keine rote Kugel ist hier:

P(keine rote Kugel) = P(blau, blau) = 0,3 = 30%

Hier haben wir dann folgende Verteilung:

Anzahl roter Kugeln	Wahrscheinlichkeit
0	0,30
1	0,60
2	0,10