© www.mathe-total.de

Berechnung von Winkeln und Seiten im rechtwinkligen Dreieck mit Sinus, Kosinus und Tangens

Sind in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten bekannt, oder eine Seite und ein zusätzlicher Winkel (außer dem, der 90° beträgt), dann kann man alle anderen Seiten und Winkel berechnen. Dazu kann man die trigonometrischen Funktionen Sinus (sin), Kosinus (cos) oder Tangens (tan) verwenden.

Hier muss man allerdings noch mal zwischen den beiden Katheten unterscheiden. Die Kathete, die an dem Winkel anliegt, den man berechnen oder verwenden möchte, heißt Ankathete und die andere heißt Gegenkathete.

Wenn $\gamma = 90°$ ist, so wäre c die Hypotenuse. Von α aus betrachtet ist dann b die Ankathete (da b an diesem Winkel anliegt) und a die Gegenkathete. Von β aus ist es umgekehrt, denn hier ist a die Ankathete und b die Gegenkathete.

Nun gelten folgende Beziehungen zwischen den Winkel und den Seiten:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

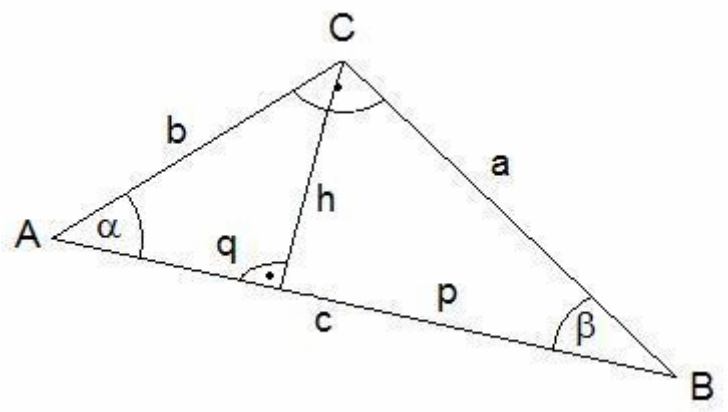
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

D.h. in einem Dreieck mit c als Hypotenuse gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \sin(\beta) = \frac{b}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad \cos(\beta) = \frac{a}{c}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \qquad \tan(\beta) = \frac{b}{a}$$



© www.mathe-total.de

Beispiele:
$\gamma = 90°$; a = 6cm; c = 10cm.
Gesucht wird α.

Wir haben somit die Hypotenuse und eine Kathete gegeben. Von α aus betrachtet ist a die Gegenkathete, womit wir den Sinus verwenden:

$$\sin(\alpha) = \frac{6\text{cm}}{10\text{cm}}$$

$$\sin(\alpha) = 0{,}6 \quad | \sin^{-1}$$

Wir wenden oben die Umkehrfunktion des Sinus an, um den Winkel α zu erhalten:

$$\alpha = \sin^{-1}(0{,}6) \approx 36{,}87°$$

$\gamma = 90°$; b = 6cm; $\alpha = 40°$.
Gesucht wird a.

Hier sind die beiden Katheten gegeben, was ein Fall für den Tangens ist:

$$\tan(40°) = \frac{a}{6\text{cm}} \quad | \cdot 6\text{cm}$$

$$a = 6\text{cm} \cdot \tan(40°) \approx 5{,}03\text{cm}$$

$\alpha = 90°$; b = 8cm; $\beta = 30°$
Gesucht wird a.

Hier ist a die Hypotenuse und von β aus ist b die Gegenkathete. Wie müssen somit den Sinus verwenden:

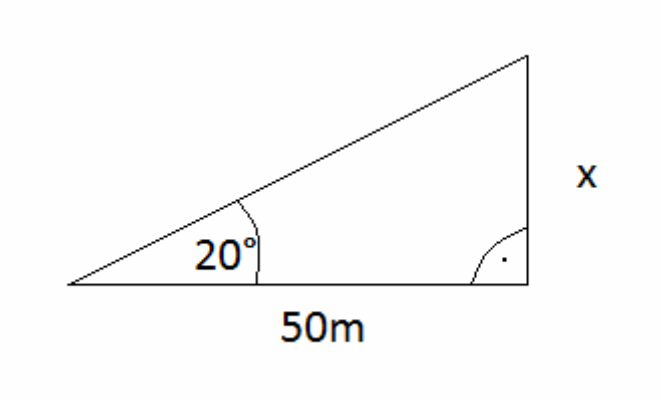
$$\sin(30°) = \frac{8\text{cm}}{a} \quad | \cdot a$$

$$a \cdot \sin(30°) = 8\text{cm} \quad | :\sin(30°)$$

$$a = \frac{8\text{cm}}{\sin(30°)} = 16\text{cm}$$

Gesucht wird x in der nächsten Grafik.

© www.mathe-total.de



x ist hier die Gegenkathete und 50m ist die Länge der Ankathete. Also muss der Tangens verwendet werden:

$$\tan(20°) = \frac{x}{50m} \quad | \cdot 50m$$

$$x = 50m \cdot \tan(20°) \approx 18{,}20m$$

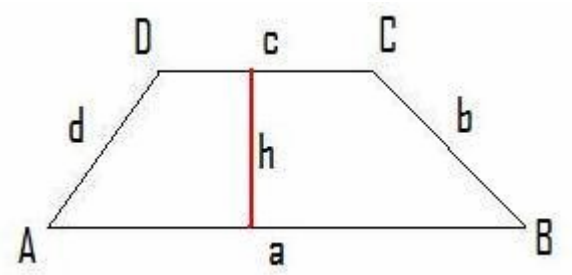
Bemerkung:
Ist neben dem rechten Winkel ein weiterer Winkel bekannt, so kennt man alle Winkel, denn es gilt allgemein:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Wenn nun z.B. $\gamma = 90°$ ist, dann wäre $\alpha + \beta + 90° = 180°$, bzw. es gilt dann: $\alpha + \beta = 90°$

Aufgaben:
1) Berechne alle fehlenden Seiten und Winkel:
a) $\gamma = 90°$; a = 8cm; c = 12cm;
b) $\gamma = 90°$; a = 5dm; $\alpha = 40°$;
c) $\gamma = 90°$; b = 5m; $\alpha = 30°$;
d) $\gamma = 90°$; a = 5mm; b = 7mm
e) $\alpha = 90°$; $\gamma = 60°$; c = 8m

2) Berechne h und alle Winkel in den Ecken (α ist der Winkel in der Ecke A, …).



Es sei a = 12cm; c = 6cm; b = d = 5cm

© www.mathe-total.de

3) Ein Baum wirft einen 5m langen Schatten. Die Sonnenstrahlen treffen unter einem Winkel von 40° auf die Erde auf. Wie hoch ist der Baum?

4) Auf einem Schild steht 5% Steigung.
a) Wie groß ist der Neigungswinkel der Straße?
b) Wenn man auf dieser Straße 80m fährt, welcher Höhenunterschied ergibt sich dann?

Lösungen:

1)
a) $\alpha \approx 41{,}81°$; $\beta \approx 48{,}19°$; b ≈ 8,94cm
b) $\beta = 50°$; b ≈ 5,96dm; c ≈ 7,78dm
c) $\beta = 60°$; a ≈ 2,89m; c ≈ 5,77m
d) $\alpha \approx 35{,}54°$; $\beta \approx 54{,}46°$; c = 8,6mm
e) $\beta = 30°$; a ≈ 9,24m; b ≈ 4,62m

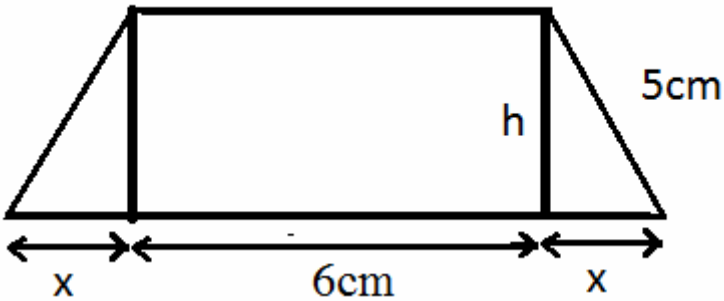
2) Wegen der Symmetrie des Trapezes (b = d) kann man zunächst x berechnen. Es gilt:

$$2x + c = a$$

$$2x + 6cm = 12cm \quad | -6cm$$

$$2x = 6cm \quad | :2$$

$$x = 3cm$$



Somit kann man h über Pythagoras berechnen:

$$b^2 = x^2 + h^2$$

$$(5cm)^2 = (3cm)^2 + h^2$$

Die Lösung ist h = 4cm.

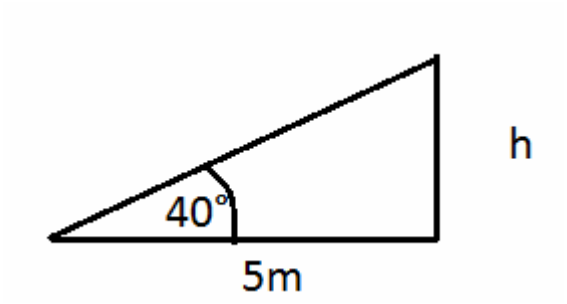
Es gilt außerdem (da in dem Dreieck mit den Seiten x, h und d die Seite d die Hypotenuse ist und die Seite x von α aus die Ankathete):

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{d} = \frac{3cm}{5cm}$$

© www.mathe-total.de

Dies ergibt $\alpha \approx 53{,}13°$. Wegen der Symmetrie ist $\beta \approx 53{,}13°$. Da auch $\gamma = \delta$ ist und $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$ gilt (Winkelsumme im Viereck), ist $\gamma = \delta \approx 126{,}87°$.

3) Die Höhe des Baumes sei h (siehe Grafik).

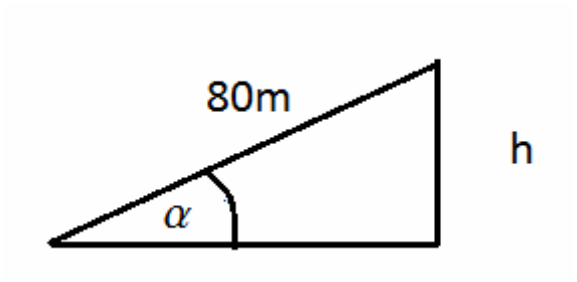


Es gilt:

$$\tan(40°) = \frac{h}{5m}$$

Somit ist h ≈ 4,20m und der Baum ist ca. 4,2m hoch.

4) Skizze:



Für die Steigung in Prozent (p) gilt (wenn c die Hypothenuse wäre, ist p = b/a·100%):

$$p = \tan(\alpha)\cdot 100\%$$

Also ist $5\% = \tan(\alpha)\cdot 100\%$ und somit $\tan(\alpha) = 0{,}05$, womit sich $\alpha \approx 2{,}86°$ ergibt. Außerdem gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{80m}$$

Also ist h ≈ 4,00m, womit ein Höhenunterschied von ca. 4m bewältigt wird.