

Wurzeln

Die Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl a , d.h. \sqrt{a} für $a \geq 0$, ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Bemerkungen:

1) Damit ist $\sqrt{4} = 2$, denn $2^2 = 4$. Die Zahl unter der Wurzel wird der Radikand genannt. Ein häufig gemachter Fehler bei Wurzel ist der folgende: $\sqrt{4} = \pm 2$. Dies ist falsch! Denn die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwar zwei Lösungen, nämlich 2 und -2, aber die Wurzel aus einer Zahl ist immer die positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$. Sonst könnte man über die Wurzel keine Funktion definieren und die Rechnung $\sqrt{4} + \sqrt{9}$ hätte 4 Ergebnisse, nämlich

$$2 + 3, 2 - 3, -2 + 3 \text{ und } -2 - 3.$$

2) Es gibt keine reelle Zahl, für die $x^2 = -4$ wäre. Aus diesem Grund gibt es keine reelle Zahl $\sqrt{-4}$.

Für das Wurzelziehen ohne Taschenrechner sollte man einige Quadratzahlen kennen:

$$2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, \dots, 25^2 = 625$$

Dies dient allerdings nur der Übung, denn die „meisten“ Wurzeln - alleine schon aus den natürlichen Zahlen - ergeben keine natürliche Zahl, nicht mal eine rationale Zahl. Rationale Zahlen sind Zahlen, die man als Bruch (aus ganzen Zahlen) schreiben kann und die dann entweder nach dem Komma „irgendwann“ abbrechen oder periodisch sind. Die Menge der rationalen Zahlen wird mit \mathbb{Q} bezeichnet. Beispielsweise ergibt $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl. Irrationale Zahlen sind Zahlen, die unendlich viele Nachkommastellen besitzen und nicht periodisch sind. Die Menge der irrationalen Zahlen wird mit \mathbb{I} bezeichnet. Die irrationalen Zahlen und die rationale Zahlen zusammen ergeben die reellen Zahlen, d.h. es gilt $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$. \mathbb{R} ist die Menge der reellen Zahlen.

Es gilt:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096980785696718753769\dots$$

Beispiele für Wurzeln:

$$\sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{121} = 11$$

$$\sqrt{625} = 25$$

$$\sqrt{169} = 13$$

$$\sqrt{225} = 15$$

$$\sqrt{2,25} = 1,5$$

Wird unter der Wurzel (d.h. beim Radikand) das Komma um zwei Stellen verschoben, so ist es beim Ergebnis um eine Stelle verschoben. Dies liegt daran, dass bei Produkten und Quotienten (nicht bei Summen!) die Wurzeln getrennt gezogen werden können:

$$\sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10}$$

$$\sqrt{16900} = \sqrt{169 \cdot 100} = 13 \cdot 10 = 130$$

Damit halbieren sich bei den folgenden **Beispielen** mit rationalen Ergebnissen die Anzahl der Nullen bzw. Nachkommastellen durch das Wurzelziehen:

$$\sqrt{0,04} = 0,2$$

$$\sqrt{0,0025} = 0,05$$

$$\sqrt{160000} = 400$$

$$\sqrt{3600} = 60$$

$$\sqrt{0,000001} = 0,001$$

Beispiele für Brüche:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$$

Kommen wir nun zum teilweisen Wurzelziehen:

Lässt sich der Radikand als ein Produkt aus einer Zahl und einer Quadratzahl (bzw. aus einer Zahl, aus der man durch das Wurzelziehen eine rationale Zahl erhält) darstellen, so kann man teilweise die Wurzel ziehen.

Beispiele:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}$$

$$\sqrt{300} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10 \cdot \sqrt{3}$$

$$\sqrt{27} + \sqrt{12} = \sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 3} = 3 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^4 \cdot y} = x^2 \cdot \sqrt{y}$$

Oder für Quotienten:

$$\sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bemerkung:

$\sqrt{x^2} = x$ gilt für $x \geq 0$, denn beispielsweise ist $\sqrt{(-1)^2} = 1$ und nicht gleich -1 . D.h. bei Variablen muss man unter Umständen eine einschränkende Bedingung angeben. Man könnte aber auch den Betrag verwenden: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Der Betrag ist wie folgt festgelegt: Für $x \geq 0$ ist $|x| = x$ und für $x < 0$ ist $|x| = -x$, womit der Betrag einer Zahl immer positiv oder gleich Null ist (für $x = 0$). Für $\sqrt{x^4} = x^2$ benötigt man keine Einschränkung, wohl aber für $\sqrt{x^6} = x^3$, denn x^3 ist für negative x auch negativ.

Aufgaben:

1) Ziehe die folgenden Wurzeln:

$$\sqrt{64}; \sqrt{6400}; \sqrt{144}; \sqrt{2500}; \sqrt{0,81}; \sqrt{0,01}; \sqrt{1,44}; \sqrt{0,0064}$$

2) Ziehe teilweise die Wurzel und fasse - wenn möglich - zusammen:

$$\sqrt{20}; \sqrt{72}; \sqrt{48}; \sqrt{125}; \sqrt{500}; \sqrt{\frac{5}{289}}; \sqrt{\frac{9}{13}}; \sqrt{3a^2}; \sqrt{a^3b^2}; \sqrt{50} + \sqrt{8}; \sqrt{108} - \sqrt{75}$$

3) Bestimme die Lösungsmenge:

a) $x^2 = 25$

b) $x^2 = -16$

c) $x^2 - 16 = 20$

Lösungen:

1) 8; 80; 12; 50; 0,9; 0,1; 1,2; 0,08

2) $2 \cdot \sqrt{5}$; $6 \cdot \sqrt{2}$; $4 \cdot \sqrt{3}$; $5 \cdot \sqrt{5}$; $10 \cdot \sqrt{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{17}$; $\frac{3}{\sqrt{13}}$; $a \cdot \sqrt{3}$ für $a \geq 0$; $\sqrt{a^2 ab^2} = ab \cdot \sqrt{a}$ für

$a \geq 0$ und $b \geq 0$; $5 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} = 7 \cdot \sqrt{2}$; $6 \cdot \sqrt{3} - 5 \cdot \sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$

3) a) $x^2 = 25 \quad | \sqrt{\quad}$

$x = 5$ oder $x = -5$ (oft verwendete Schreibweise für die Lösungen: $x_{1/2} = \pm 5$)

Also gilt: $\mathbb{L} = \{-5; 5\}$

b) $\mathbb{L} = \{\}$

c) $\mathbb{L} = \{-6; 6\}$