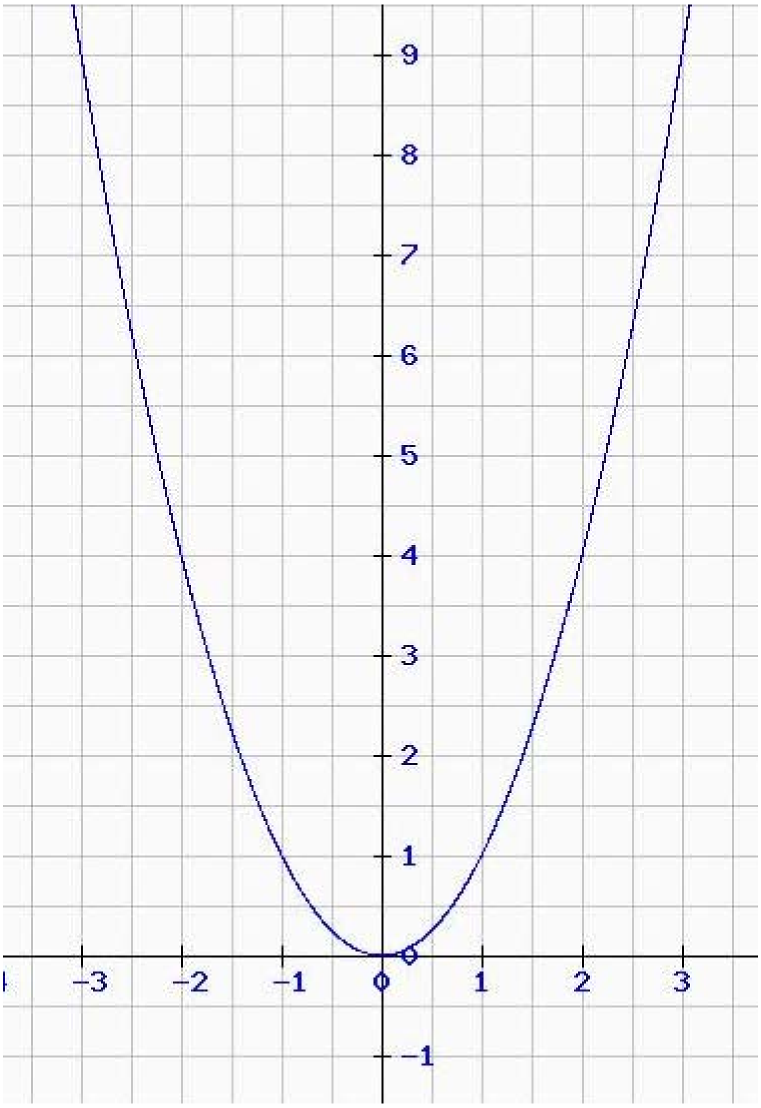
Parabeln

Die „einfachste“ Parabel ist die Normalparabel, welche die Gleichung $f(x) = x^2$ hat. Es folgt eine Wertetabelle und danach der Graph (für $-3 \leq x \leq 3$):

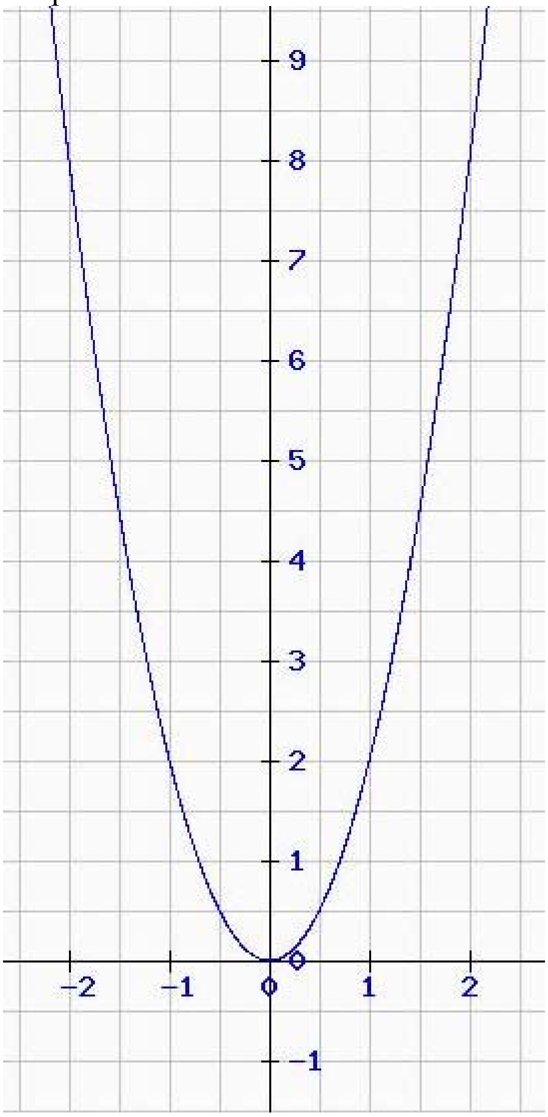
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



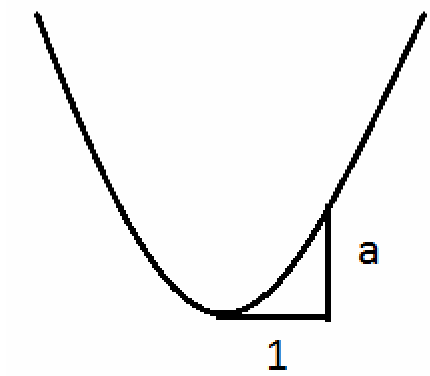
$f(x) = x^2$ hat nur eine Nullstelle. Allgemein kann eine Parabel die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ haben. Wenn $a = 1$ ist, so handelt es sich allgemein um eine Normalparabel, die (wenn nicht b und c gleich Null sind) verschoben ist. Für $a = -1$ hat die Parabel immer noch die Form einer Normalparabel, die allerdings nach unten geöffnet ist. Wenn $a > 1$ oder wenn $a < -1$ (bzw. wenn $|a| > 1$) ist, dann ist die Parabel „enger“ als die Normalparabel und somit gestaucht. Wenn a zwischen -1 und 1 liegt (d.h. wenn $|a| < 1$ ist), dann ist die Parabel weiter geöffnet als die Normalparabel und somit gestreckt (siehe hierzu auch eine Bemerkung zu den Begriff gesteckt/gestaucht unter http://www.mathe-total.de/Parabeln/Bemerkung.html). Eine Parabel kann keine, eine oder zwei Nullstellen haben. Darauf kommen wir später noch mal zurück.

Beispiele:
$f(x) = 2x^2$

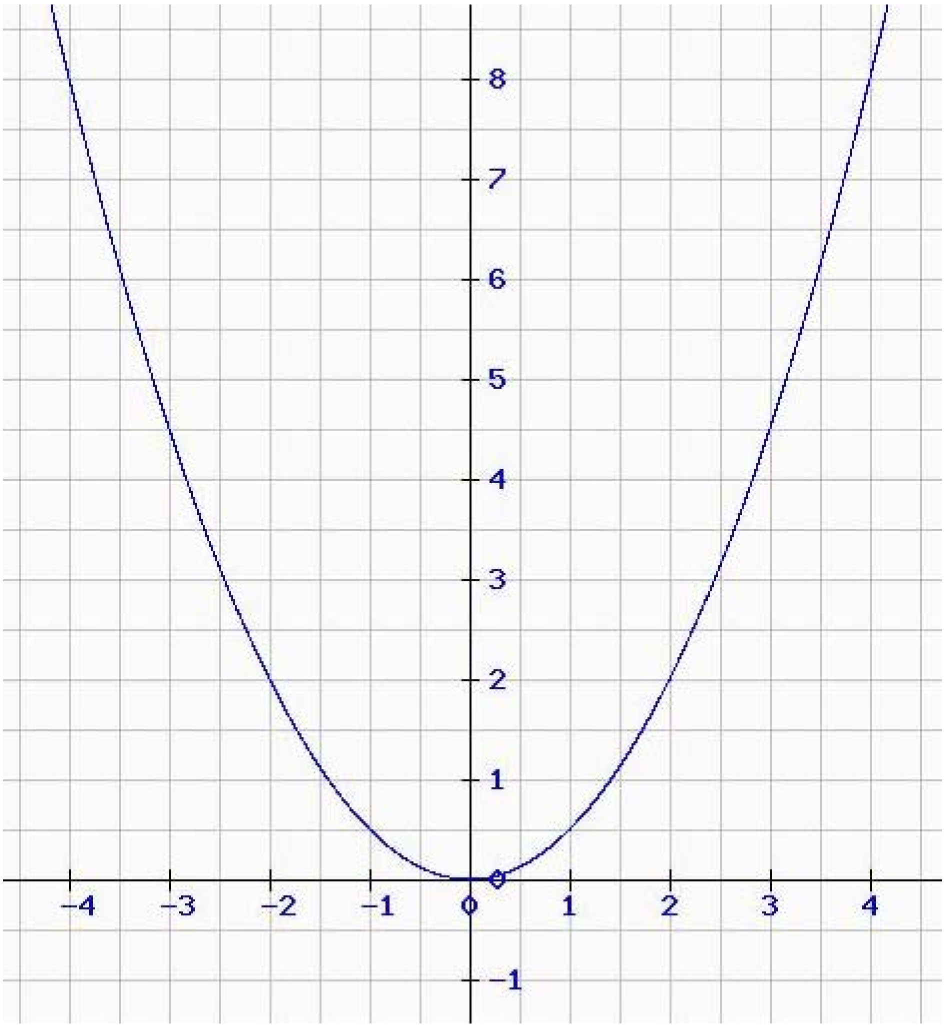
Graph:



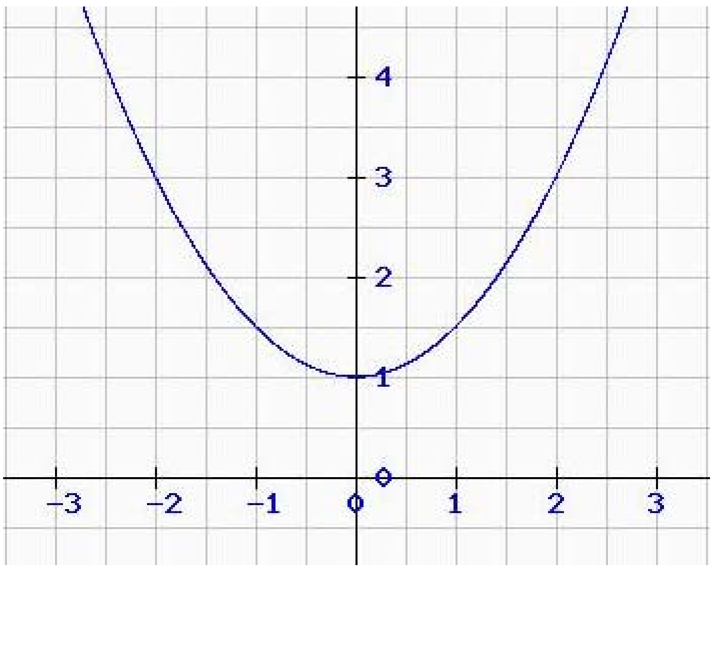
Alle Parabeln der Form $f(x) = ax^2$ haben den Scheitelpunkt S(0; 0) (dies ist der tiefste oder höchste Punkt auf der Parabel, je nachdem ob sie nach oben oder nach unten geöffnet ist). Den Wert a kann man an der Grafik ablesen, wenn man vom Scheitelpunkt aus 1 nach rechts (oder auch 1 nach links) geht und prüft, wie weit man nach oben gehen muss (oder auch nach unten, wenn a negativ ist), um wieder auf der Parabel „zu landen". Dies ist genau der Betrag von a. Geht man zwei Einheiten nach rechts, so muss man $2^2a = 4a$ nach oben gehen, wenn $a > 0$ ist (oder entsprechend nach unten, wenn a negativ ist), u.s.w..



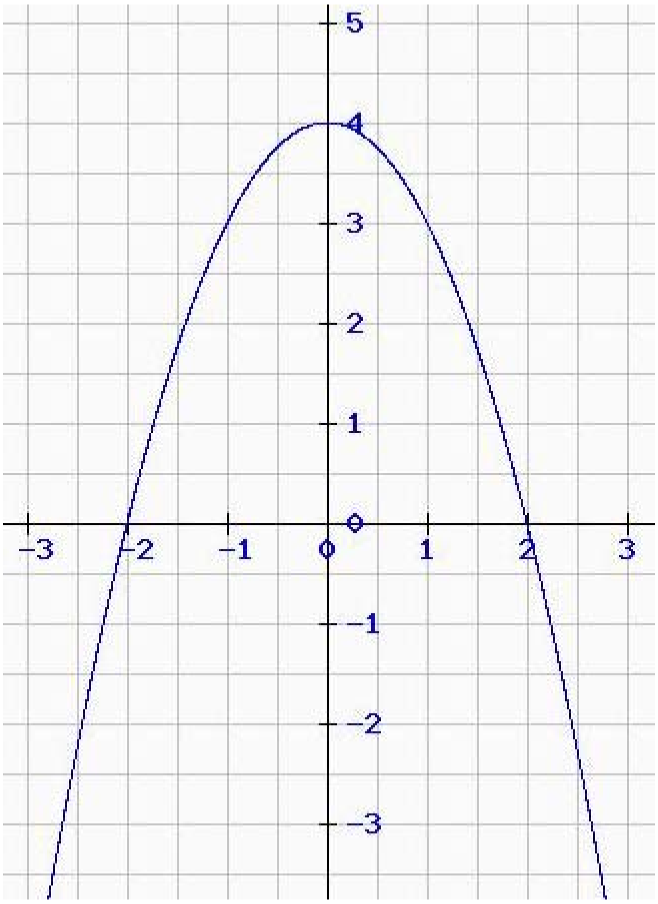
Dies gilt für alle Parabeln. Es folgt der Graph von $f(x) = 1/2x^2$:



$f(x) = 1/2x^2 + 1$ würde sich aus dem Graph von $g(x) = 1/2x^2$ ergeben, wenn man diesen um 1 nach oben schiebt (Scheitelpunkt ist dann S(0; 1)):



Es folgt der Graph von $f(x) = -x^2 + 4$ (mit Scheitelpunkt S(0; 4)):



Hier ist der Faktor a vor x negativ (a = -1), womit die Parabel nach unten geöffnet ist. Wenn auch bx als Term in der Funktionsgleichung vorhanden ist (mit b ungleich Null), dann ist die Parabel auch nach links oder nach rechts verschoben.

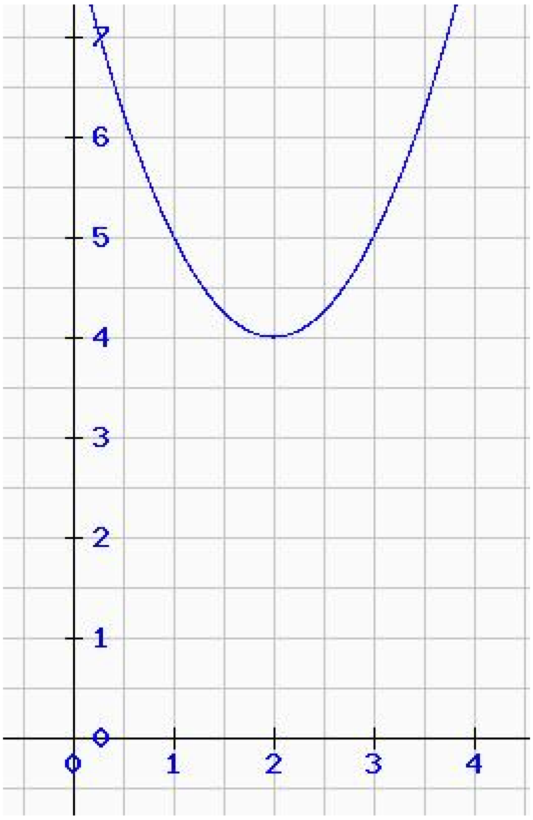
Hier könnte man den Scheitelpunkt beispielsweise bestimmen, wenn die Gleichung der Parabel in Scheitelform vorliegt (wie man eine Parabelgleichung in diese Form bringt, wird später noch gezeigt).

Scheitelform: $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$

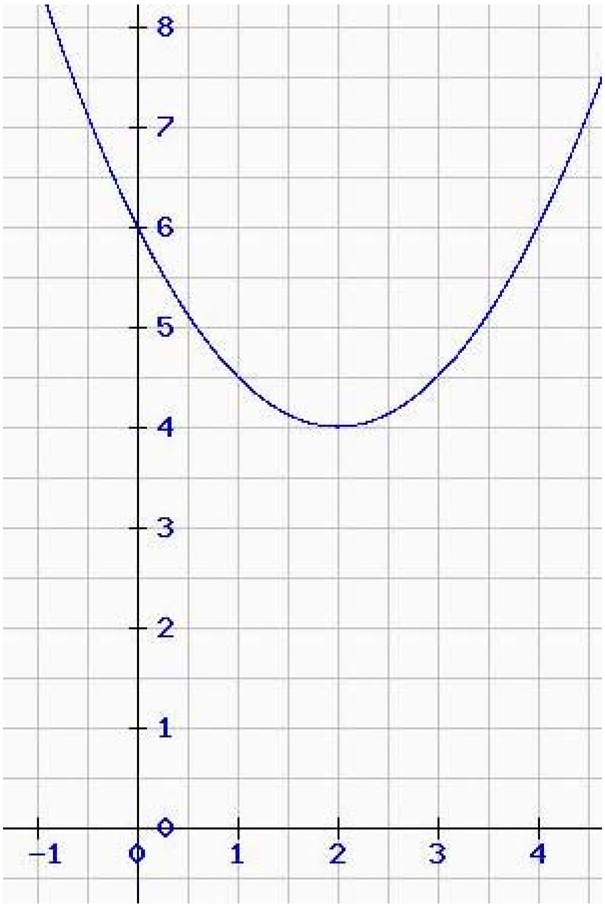
Der Scheitelpunkt ist dann $S(x_s; y_s)$.

Beispiele:

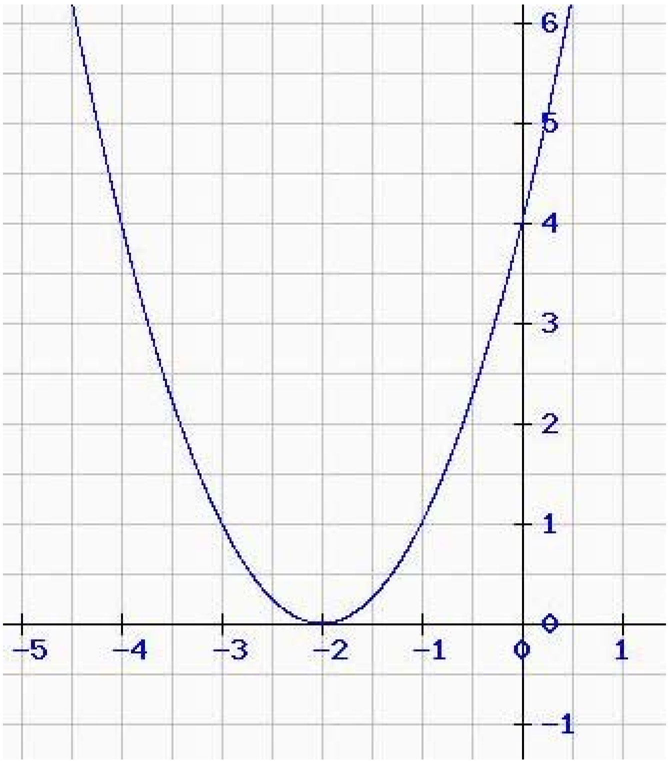
$f(x) = (x - 2)^2 + 4$ hat den Scheitelpunkt S(2; 4).



$f(x) = 1/2(x - 2)^2 + 4$ hat auch den Scheitelpunkt S(2; 4) und ist weiter geöffnet als die Normalparabel.



$f(x) = (x + 2)^2$ hat den Scheitelpunkt S(-2; 0).



Es folgen Aufgaben, Lösungen und weitere Erklärungen.

Nullstellen

Aufgabe 1

Gegeben ist die folgende quadratische Funktion:

$$f(x) = 2x^2 - 32$$

Bestimme die Nullstellen.

Lösung:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 32 &= 0 \qquad &&|:2 \\ x^2 - 16 &= 0 &&|+16 \\ x^2 &= 16 &&|\pm\sqrt{} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich x = 4 oder x = -4, da das Quadrat beider Zahlen 16 ergibt. Man schreibt

$$x_1 = 4 \quad \text{und} \quad x_2 = -4$$

Hätte auf der rechten Seite -16 gestanden, so hätte f keine Nullstellen, denn es gibt keine reelle Zahl, die mit sich selbst multipliziert -16 ergibt.

Somit haben wir zwei Nullstellen und die x-Achse wird in den Punkten $N_1(4; 0)$ und $N_2(-4; 0)$ vom Graph von f geschnitten.

Aufgabe 2

Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktion:

$$f(x) = -2x^2 + 4x$$

Lösung:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x &= 0 \qquad |:(-2) \\ x^2 - 2x &= 0 \end{aligned}$$

Hier kann man x ausklammern:

$$x(x-2) = 0$$

Nun ist ein Produkt gleich Null, wenn ein Faktor Null ist, also ist

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2$$

Somit haben wir die zwei Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

Aufgabe 3

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = -2x^2 - 8x + 10$$

Lösung:

$$\begin{aligned} -2x^2 - 8x + 10 &= 0 \qquad |:(-2) \\ x^2 + 4x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben die Gleichung zur Bestimmung der Nullstelle zunächst auf die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

gebracht. Nun zeigen wir zunächst, wie man die Gleichung mit einer quadratischen Ergänzung gelöst werden kann (wie in der Mittelstufe, bevor die p-q-Formel hergeleitet wurde). Danach wenden wir direkt die p-q-Formel an (wie es in der Oberstufe üblich ist).

Bemerkungen zur quadratischen Ergänzung:
Hätte man keine Formel, wie die p-q-Formel, die wir gleich herleiten werden, dann müsste man diese Gleichung durch eine quadratische Ergänzung lösen:

Da $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ gilt (binomische Formel anwenden), steht vor dem x in einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ immer das doppelte der Zahl, deren Quadrat man benötigt, um einen Teil der quadratischen Gleichung als Binom schreiben zu können. Bei

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

würden man $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ benötigen.

Dies kann man mit einem Trick erreichen, indem man 4 addiert und 4 subtrahiert:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 - 5 = 0$$

Man hätte hier auch, da es sich um eine Gleichung handelt, auf beiden Seiten 4 addieren können. Nun kann man einen Teil der Gleichung als Binom schreiben:

$$\begin{aligned} &(x+2)^2 - 4 - 5 = 0 \\ &(x+2)^2 - 9 = 0 \qquad |+9 \\ &(x+2)^2 = 9 \qquad |\pm\sqrt{} \end{aligned}$$

Also ist

$$x + 2 = 3 \quad \text{oder} \quad x + 2 = -3$$

was die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$ ergibt.

Nun muss man nicht jedes mal eine quadratische Ergänzung durchführen, man kann auch die p-q-Formel verwenden, die sich auch aus einer quadratischen Ergänzung ergibt:

Die **p-q-Formel** zum Lösen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Anwendung der p-q-Formel:

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

Hier ist p = 4 und q = -5:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-5)} \\ &= -2 \pm \sqrt{4+5} \end{aligned}$$

Somit ist $x_1 = -2 + 3 = 1$ und $x_2 = -2 - 3 = -5$.

Wir haben zwei Nullstellen erhalten, da hier der Wert unter der Wurzel bzw. von $(p/2)^2 - q > 0$ war. Wäre $(p/2)^2 - q = 0$, so hätte die quadratische Gleichung nur eine Lösung und die Funktion hätte somit nur eine (doppelte) Nullstelle. Falls $(p/2)^2 - q < 0$ wäre, hätte die Gleichung keine Lösung (und somit hätte die Funktion keine Nullstellen).

Scheitelpunkt und Scheitelform

Aufgabe 4

Bestimme den Scheitelpunkt der Funktion

$$f(x) = x^2 + 4x \ -5$$

Lösung:

Da, wie bereits in der vorangegangenen Aufgabe beschrieben, $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ gilt (binomische Formel anwenden), steht vor dem x in einer quadratischen Gleichung immer das doppelte der Zahl, deren Quadrat man benötigt, um einen Teil der quadratischen Gleichung als Binom schreiben zu können.

Hier würden man $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ benötigen. Man addiert somit 4 und subtrahiert gleichzeitig 4, was die Funktion nicht verändert:

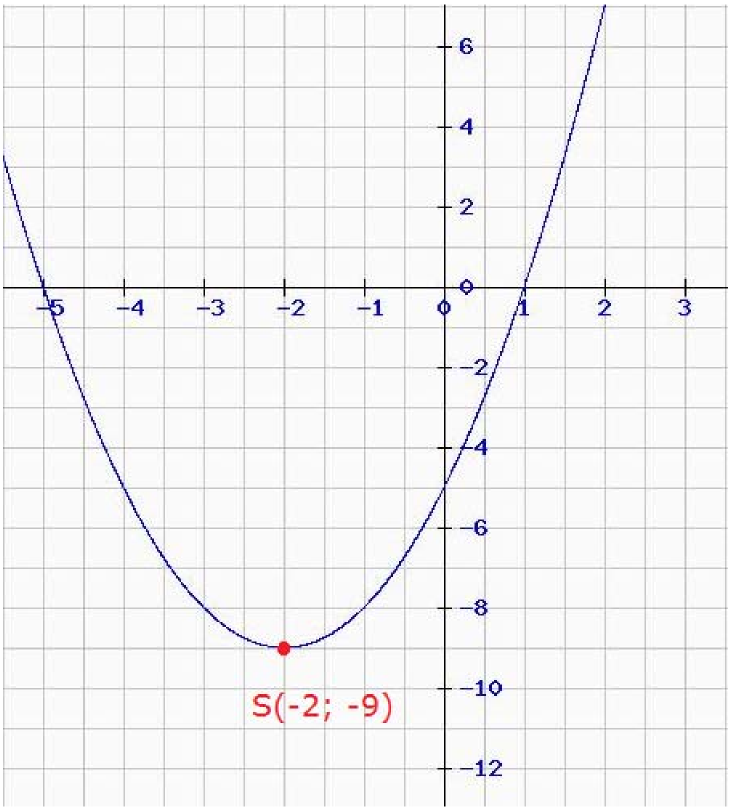
$$f(x) = x^2 + 4x \ + 4 \ - 4 - 5$$

Nun kann man einen Teil der Gleichung als Binom schreiben:

$$f(x) = (x + 2)^2 \ - 4 - 5$$

$$f(x) = (x + 2)^2 \ - 9$$

Somit können wir den Scheitelpunkt ablesen, der S(-2; -9) ist. Die Symmetrieachse der Parabel ist dann x = -2 und den kleinsten Funktionswert, den die Funktion annehmen kann, der ist -9.



Aufgabe 5

Gesucht wird die Scheitelform der Parabel mit der Gleichung $f(x) = 2x^2 - 12x + 8$.

Lösung:

Wir klammern 2 aus, wobei wir die Konstante 8 auch außerhalb der Klammern stehen lassen können (in kursiv ist die quadratische Ergänzung zu sehen):

$$f(x) = 2[x^2 - 6x] + 8$$

$$= 2[x^2 - 6x + \mathit{(6/2)^2} - \mathit{(6/2)^2}] + 8$$

$$= 2[(x-3)^2 - 9] + 8$$

$$= 2(x-3)^2 - 10$$

Bestimmung der Funktionsgleichung einer Parabel

Aufgabe 6

Eine verschobene Normalparabel (a = 1) hat die Nullstellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 2$. Bestimme die Funktionsgleichung.

Lösung:

$$f(x) = (x-(-4))(x-2)$$

$$= (x+4)(x-2)$$

$$= x^2 - 2x + 4x - 8$$

Also $f(x) = x^2 + 2x - 8$.

Aufgabe 7

Eine Parabel hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ und geht durch den Punkt P(1;3). Bestimme die Funktionsgleichung.

Lösung:

$$f(x) = a(x-0)(x-4)$$

$$= ax(x-4)$$

Es gilt: $f(1) = a(1-4) = 3$

$$-3a = 3$$

$$a = -1$$

Also ist $f(x) = -x(x-4) = -x^2 + 4x$.

Aufgabe 8

Eine Parabel hat den Scheitelpunkt S(1; 4) und geht durch den Punkt P(3; 12). Bestimme die Funktionsgleichung.

Lösung:

Die **Scheitelform** ist:

$$f(x) = a(x-x_s)^2 + y_s$$

Hier also $f(x) = a(x - 1)^2 + 4$.

Nun bestimmen wir noch a:

$$f(3) = a(3 - 1)^2 + 4 = 12$$

$$4a + 4 = 12 \quad | -4$$

$$4a = 8 \mid :4$$

$$a = 2$$

Also ist $f(x) = 2(x - 1)^2 + 4$.

Oder ausmultipliziert:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x - 1)^2 + 4 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 4 \\ &= 2x^2 - 4x + 6 \end{aligned}$$

Aufgabe 9

Eine Parabel verläuft durch die folgenden Punkte A(-2; -6), B(2; 10) und C(-1; 4). Bestimme die Funktionsgleichung.

Lösung:

Ansatzfunktion ist $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(1) $f(-2) = (-2)^2a + (-2)b + c = -6$
(2) $f(2) = 2^2a + 2b + c = 10$
(3) $f(-1) = (-1)^2a + (-1)b + c = 4$

(1) $4a - 2b + c = -6$
(2) $4a + 2b + c = 10$
(3) $a - b + c = 4$

Nun entscheidet man sich für eine Variable (z.B. c), die man eliminieren möchte und addiert/subtrahiert vielfache einer Gleichung zu/von einer anderen. Dabei macht man zunächst aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Wäre ein Punkt z.B. (0; …) gewesen, so hätte man bereits mit einer Gleichung schon den Wert von c und könnte diesen in die anderen beiden einsetzen.

Subtrahiert man die Gleichung (2) von (1), so erhält man:

(4) $-4b = -16$

Als nächstes subtrahieren wir (3) von (1) (hier muss jeweils eine neue Gleichung verwendet werden), so erhält man:

$$(5) \qquad 3a - b = -10$$

Aus (4) ergibt sich b = 4. Setzt man b = 4 in (5) ein, so ergibt sich:

$$3a - 4 = -10 \mid +4$$

$$3a = -6 \mid :3$$

$$a = -2$$

Nun kann man a = -2 und b = 4 z.B. in (3) einsetzen:

$$-2 - 4 + c = 4$$

Somit ist c = 10.

Also ist $f(x) = -2x^2 + 4x + 10$.