Logarithmen

Mit einem Logarithmus kann man Gleichungen der Form

$$b = a^x$$

lösen (mit a > 0 und b > 0). Zu einem Logarithmus gehört immer eine Basis. $\log_a(x)$ ist der Logarithmus von x zur Basis a und ist die Umkehrfunktion von a^x. Damit gilt $\log_a(a^x) = x$. Nun kann man die obige Gleichung durch Anwendung des $\log_a$ auf beide Seiten lösen:

$$b = a^x \qquad | \log_a$$

$$x = \log_a(b)$$

Also: $b = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(b)$

Damit wäre $\log_{10}(1000)$ die Lösung der Gleichung $10^x = 1000$. Es gilt somit $\log_{10}(1000) = 3$.

Weiterhin gilt:

$\log_a(a) = 1$ und $\log_a(1) = 0$ (da $a^0 = 1$).

Aufgaben:
$\log_2(4)$, $\log_3(27)$, $\log_2(\sqrt{2})$, $\log_{10}(0{,}001)$, $\log_5(1/25)$, $\log_{10}(1000000)$, $\log_3(1/\sqrt{3})$

Lösungen:
$\log_2(4) = \log_2(2^2) = 2$, $\log_3(27) = \log_3(3^3) = 3$, $\log_2(\sqrt{2}) = \log_2(2^{1/2}) = 1/2$,
$\log_{10}(0{,}001) = \log_{10}(10^{-3}) = -3$, $\log_5(1/25) = \log_5(1/5^2) = \log_5(5^{-2}) = -2$,
$\log_{10}(1000000) = 6$, $\log_3(1/\sqrt{3}) = \log_3(3^{-1/2}) = -1/2$

Zu den bekanntesten Logarithmen zählen $\lg(x) = \log_{10}(x)$ und $\ln(x) = \log_e(x)$, wobei e die Euler'sche Zahl ist.

Es gelten folgende Gesetz (die sich von den Potenzgesetzen ableiten lassen):

(1) $\log_a(c^x) = x \cdot \log_a(c)$

(2) $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

(3) $\log_a(b/c) = \log_a(b) - \log_a(c)$

Aus (3) folgt: $\log_a(1/c) = \log_a(1) - \log_a(c) = -\log_a(c)$.

Mit dem Gesetz (1) könnte man die Gleichung $5^x = 28$ auch ohne den Logarithmus zur Basis 5 lösen und einen beliebigen Logarithmus verwenden:

$$5^x = 28 \quad | \lg$$

$$x \cdot \lg(5) = \lg(28) \quad | : \lg(5)$$

$$x = \lg(28)/\lg(5) \approx 2{,}070$$

Damit wäre $\log_5(28)$ das gleiche wie $\lg(28)/\lg(5)$ oder wie $\ln(28)/\ln(5)$.

Aufgaben:

$\log_a(10a)$, $\log_a(a \cdot b^3)$, $\log_a(c^4/d^3)$, $\log_a(\sqrt{a^5})$, $\log_a\left(\frac{b^3c^4}{d^5}\right)$, $\lg\left(\frac{10000a^5}{b^3\sqrt{c}}\right)$

Lösungen:

$\log_a(10a) = \log_a(10) + \log_a(a) = \log_a(10) + 1$

$\log_a(a \cdot b^3) = \log_a(a) + \log_a(b^3) = 1 + 3 \cdot \log_a(b)$

$\log_a(c^4/d^3) = \log_a(c^4) - \log_a(d^3) = 4 \cdot \log_a(c) - 3 \cdot \log_a(d)$

$\log_a(\sqrt{a^5}) = \log_a(a^{5/2}) = 5/2$

$$\log_a\left(\frac{b^3c^4}{d^5}\right) = \log_a(b^3 \cdot c^4) - \log_a(d^5) = \log_a(b^3) + \log_a(c^4) - \log_a(d^5)$$
$$= 3 \cdot \log_a(b) + 4 \cdot \log_a(c) - 5 \cdot \log_a(d)$$

$$\lg\left(\frac{10000a^5}{b^3\sqrt{c}}\right) = \lg(10000a^5) - \lg(b^3 \cdot c^{1/2}) = \lg(10000) + \lg(a^5) - (\lg(b^3) + \lg(c^{1/2}))$$
$$= 4 + 5 \cdot \lg(a) - 3 \cdot \lg(b) - 1/2 \cdot \lg(c)$$

Aufgaben:

Gesucht ist die Lösung der Gleichung:

a) $8^x = 20$
b) $5^{x+1} = 125$
c) $2 \cdot 3^x = 28$
d) $5 \cdot 3^x = 4^{x-2}$
e) $4^{2x+1} = 64$
f) $\log_2(x+5) = 3$

Lösungen:

a) $8^x = 20 \quad | \log_8$

$x = \log_8(20) \approx 1{,}441$

Falls der Taschenrechner nur eine lg-Taste besitzt:

$8^x = 20 \quad | \lg$

$x \cdot \lg(8) = \lg(20) \quad | :\lg(8)$

$x = \lg(20)/\lg(8)$

b) $5^{x+1} = 125 \,| \log_5$

$x+1 = 3 \,| -1$

$x = 2$

c) $2 \cdot 3^x = 28 \quad | :2$

$3^x = 14 \,| \log_3$

$x = \log_3(14) \approx 2{,}402$

d) $5 \cdot 3^x = 4^{x+1} \,| \log_4$

$\log_4(5) + x \cdot \log_4(3) = x + 1$

Nun sollte man alle „Terme mit x“ auf eine Seite bringen und die Zahlen („ohne x“) auf die andere Seite:

$\log_4(5) + x \cdot \log_4(3) = x + 1 \quad | -x - \log_4(5)$

$x \cdot \log_4(3) - x = 1 - \log_4(5)$

Nun x ausklammern:

$x \cdot (\log_4(3) - 1) = 1 - \log_4(5) \quad | : (\log_4(3) - 1)$

$x = (1 - \log_4(5)) / (\log_4(3) - 1)$

$x \approx 0{,}7757$

e) $4^{2x+1} = 64$

Lösung: $x = 1$ (klar, da $64 = 4^3$ ist, muss $2x+1 = 3$ sein)

f) $\log_2(x+5) = 3$

Da $a^{\log_a(x)} = x$ gilt, kann man auf beide Seiten die Funktion $f(x) = 2^x$ anwenden und erhält

$$x + 5 = 2^3 \quad ,$$

womit die Lösung $x = 3$ lautet.