Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Wie beginnen mit einem **Beispiel**:
Gesucht ist die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} &(I)\ 2x - y = 4 \\ &(II)\ x + y = 5 \end{aligned}$$

Hier stehen eine Reihe von Verfahren zur Verfügung. In diesem Beispiel würde sich das Additionsverfahren anbieten. Dabei werden die beiden linken und die beiden rechten Seiten der Gleichungen addiert:

$$(I) + (II) \qquad 3x = 9$$

Die Variable y ist entfallen. Nun können wir die Gleichung nach x auflösen und erhalten $x = 3$.
Diese Lösung können wir nun in (I) oder in (II) einsetzen und erhalten y:

In (II) $3 + y = 5 \mid -3$

$$y = 2$$

Also ist $x = 3$ und $y = 2$.

Im Allgemeinen muss man die Gleichungen (I) und (II) mit geeigneten Zahlen multiplizieren, so dass man dass Additionsverfahren anwenden kann.

Beispiel:

$$\begin{aligned} &(I)\ 3x - 4y = 2 \\ &(II)\ 2x + y = 5 \end{aligned}$$

Hier könnte man die zweite Gleichung mit 4 multiplizieren, damit nach einer Additino der beiden Gleichungen die Variable y entfällt.

$$\begin{aligned} (I)\ & 3x - 4y = 2 \\ 4 \cdot (II)\ & 8x + 4y = 20 \end{aligned}$$

Nun können wir addieren:

$$(I) + 4 \cdot (II)\ 11x = 22 \mid : 11$$

$$x = 2$$

In (II) einsetzen ergibt: $2 \cdot 2 + y = 5$. Also ist $y = 1$.

Ein weiteres **Beispiel**:

$$\begin{aligned} &(I)\ \ 2x - 5y = 3 \\ &(II)\ 3x + 8y = 20 \end{aligned}$$

Hier könnte man die zweite Gleichung mit -2 und die erste Gleichung mit 3 multiplizieren. Danach kann man y durch Addition eliminieren.

$$\begin{aligned} 3\cdot(I)\ \ & 6x - 15y = 9 \\ -2\cdot(II)\ & -6x - 16y = -40 \end{aligned}$$

Eine Addition ergibt: $-31y = -31$, womit $y = 1$ ist. Setzt man $y = 1$ z.B. in (I) ein, erhält man:

$$2x - 5 = 3 \mid +5$$

$$2x = 8 \mid :2$$

$$x = 4$$

Also ist $x = 4$ und $y = 1$.

Neben dem Additionsverfahren gibt es auch das Subtraktionsverfahren, was sich aber auf das Additionsverfahren zurückführen lässt (wenn man eine Gleichung mit -1 multipliziert).

Hätte man oben die Gleichung (II) statt mit -2 mit 2 multipliziert, so könnte man das Subtraktionsverfahren anwenden:

$$\begin{array}{rl} 6x - 15y &= 9 \\ 6x + 16y &= 40 \qquad - \\ \hline -31y &= -31 \end{array}$$

Es ergibt sich dieselbe Gleichung wie oben. Wenn also zwei Koeffizienten einer Variablen gleich sind, kann man das Subtraktionsverfahren verwenden und bei verschiedenen Vorzeichen das Additionsverfahren.

Ist eine der beiden Gleichungen nach einer Variablen aufgelöst, so kann man das Einsetzungsverfahren anwenden:

$$\begin{aligned} &(I)\ 2x - 3y = 3 \\ &(II)\qquad\ \ y = x - 2 \end{aligned}$$

(II) in (I) einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} 2x - 3\cdot(x - 2) &= 3 \\ -x + 6 &= 3 \mid -6 \\ -x &= -3 \mid :(-1) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Nun kann man $x = 3$ in (II) einsetzen und erhält $y = 3 - 2 = 1$.

Liegen beide Gleichungen in der nach derselben Variablen aufgelösten Form vor, so kann man das Gleichsetzungsverfahren anwenden:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & y = 2x - 4 \\ \text{(II)} & y = 4x + 4 \end{array}$$

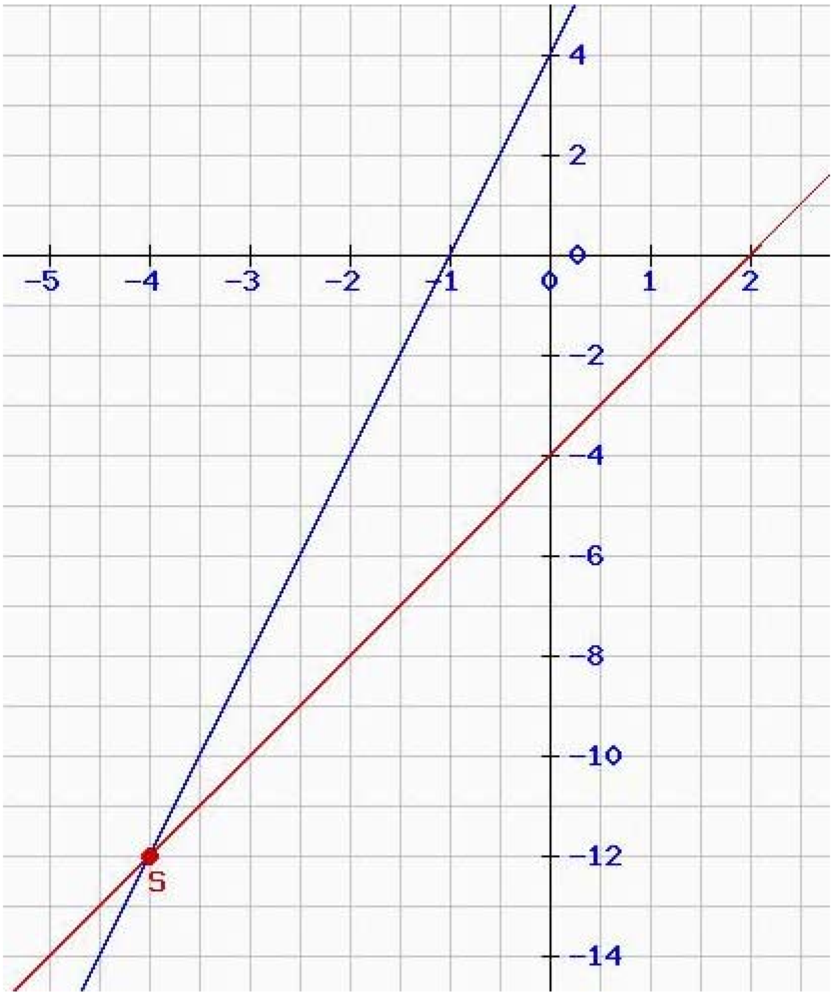
Gleichsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 4x + 4 \mid +4 \\ 2x &= 4x + 8 \mid -4x \\ -2x &= 8 \mid :(-2) \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Nun kann man x = -4 in (I) oder (II) einsetzen. Wir setzen in (I) ein und erhalten $y = 2\cdot(-4) - 4 = -12$.

Die Lösung eines Gleichungssystems mit 2 Unbekannten kann man als Schnittpunkt zweier Geraden interpretieren. Somit kann man die Lösungsmenge wie folgt angeben: $\mathbb{L} = \{(-4; -12)\}$

Im obigen Beispiel sehen die Geraden wie folgt aus:



Spezialfälle:
Nun könnte es passieren, dass beide Geraden parallel sind. In diesem Fall hätten wir keine Lösung. Wenn beide Geraden aufeinander liegen würden, hätte man unendliche viele Lösungen, nämlich alle Punkte auf der Geraden.

Beispiele:

$$\begin{aligned} &(I) \quad y = 2x + 4 \\ &(II) \quad y = 2x + 8 \end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt: $2x + 4 = 2x + 8 \mid -2x$

$$4 = 8$$

Dies ist ein Widerspruch, womit keine Lösung existiert, was man schon an den Gleichungen hätte sehen können, da sie zwei parallele Geraden beschreiben. Es gilt $\mathbb{L} = \{\}$.

$$\begin{aligned} &(I) \quad y = 2x + 4 \\ &(II) \quad y = 2x + 4 \end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt: $2x + 4 = 2x + 4 \mid -2x$

$$4 = 4$$

Die Gleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Somit wäre die Lösungsmenge durch

$$\mathbb{L} = \{(x; y) \mid y = 2x + 4\}$$

gegeben.

Beispiel für Textaufgabe:
2 Cola und 3 Hamburger kosten 9,70€. 5 Cola und 8 Hamburger kosten 25,50€. Wie viel kostet eine Cola und wie viel ein Hamburger?

Zu Beginn muss man die Variablen und deren Bedeutung festlegen. Wir wählen x für den Preis einer Cola und y für den Preis eines Hamburgers. Nun müsste zweimal der Preis für eine Cola und dreimal der Preis für einen Hamburger 9,70€ ergeben. So können wir die beiden Gleichungen (bei zwei Variablen bzw. Unbekannten benötigen wir auch zwei Gleichungen) aufstellen, wobei wir ohne Einheiten rechnen:

$$\begin{aligned} &(I) \quad 2x + 3y = 9{,}7 \\ &(II) \quad 5x + 8y = 25{,}5 \end{aligned}$$

Wie müssen uns wieder für eine Variable entscheiden, die wie eliminieren möchten. Wir wählen x. Nun multiplizieren wir die erste Zeile mit 5 und die zweite Zeile mit 2:

$$\begin{aligned} &5\cdot(I) \quad 10x + 15y = 48{,}5 \\ &2\cdot(II) \quad 10x + 16y = 51 \end{aligned}$$

Wir wenden das Subtraktionsverfahren an:

$$5\cdot(I) - 2\cdot(II) \quad -y = -2{,}5 \mid :(-1)$$

$$y = 2{,}5$$

Dies setzen wir in (I) ein:

$$2x + 3 \cdot 2{,}5 = 9{,}7$$
$$2x + 7{,}5 = 9{,}7 \quad | -7{,}5$$
$$2x = 2{,}2 \quad | :2$$
$$x = 1{,}1$$

Damit kostet eine Cola 1,10€ und ein Hamburger 2,50€.

Bemerkungen:
Man könnte immer mit einem Verfahren auskommen, wenn man zuvor die Gleichungen entsprechend umformt. Beispiel:

$$\text{(I)} \quad 5x + 4y = 9$$
$$\text{(II)} \quad 2x - 3y = -1$$

Hier würde sich eigentlich das Additionsverfahren oder Subtraktionsverfahren anbieten, man könnte aber auch die Gleichungen so umformen, dass man das Einsetzungsverfahren anwenden kann. Dabei würde es sich anbieten, die zweite Gleichung nach x aufzulösen:

$$2x - 3y = -1 \quad | +3y$$
$$2x = -1 + 3y \quad | :2$$
$$x = -1/2 + 3/2y$$

Nun könnte man das Einsetzungsverfahren anwenden und in (I) einsetzen.

Beim Einsetzungsverfahren könnte man auch nach Vielfachen von x oder y auflösen (d.h. z.B. nach 2x). Beispiel:

$$\text{(I)} \quad 2x + 3y = -1$$
$$\text{(II)} \quad 2x = y + 3$$

Hier kann man den Term 2x in Gleichung (I) durch y + 3 ersetzen, womit man die Gleichung

$$y + 3 + 3y = -1 \text{ bzw. } 4y + 3 = -1$$

erhält, die man nach y auflösen kann. Dies könnte man tun, wenn man zunächst Brüche vermeiden möchte.

Aufgaben:
1)
a)
$x + y = -1$
$-x + y = 5$

b)
$2x + 3y = 11$
$4x - 2y = 14$

c)
$3x + 5y = 4$
$-4x + 8y = 24$

d)
$y = 2x - 5$
$2x + 3y = 9$

e)
$4x + 3y = 26$
$4x = 2y + 16$

f)
$x = 2y + 3$
$x = -4y + 9$

2)
a) Jenny ist doppelt so alt wie Justin. Bei zusammen sind 18 Jahre alt. Wie alt sind die beiden?

b) In 6 Jahren ist Tim doppelt so alt wie Jasmin. Heute ist Tim 18 Jahre älter als Jasmin. Wie alt sind beide heute?

Lösungen:
1)
a) $\mathbb{L} = \{(-3; 2)\}$

b) $\mathbb{L} = \{(4; 1)\}$

c) $\mathbb{L} = \{(-2; 2)\}$

d) $\mathbb{L} = \{(3; 1)\}$

e) $\mathbb{L} = \{(5; 2)\}$

f) $\mathbb{L} = \{(5; 1)\}$

2)
a)
Wir wählen x = Alter Jenny und y = Alter Justin.

$$\begin{array}{lr} \text{(I)} & x = 2y \\ \text{(II)} & x + y = 18 \end{array}$$

(I) in (II) einsetzen:
$$\begin{aligned} 2y + y &= 18 \\ 3y &= 18 \mid :3 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

In (I) einsetzen ergibt x = 12. Also ist Jenny 12 Jahre alt und Justin 6.

b)
Wir wählen x = Alter Tim (heute) und y = Alter Jasmin (heute).

In 6 Jahren ist Tim x + 6 Jahre alt und Jasmin y + 6 Jahre:

$$\text{(I)} \quad x + 6 = 2(y + 6)$$
$$\text{(II)} \quad x = 18 + y$$

.

Also ist:

$$\text{(I)} \quad x + 6 = 2y + 12$$
$$\text{(II)} \quad x = 18 + y$$

(II) in (I):

$$18 + y + 6 = 2y + 12$$
$$y + 24 = 2y + 12 \mid -24$$
$$y = 2y - 12 \quad \mid -2y$$
$$-y = -12 \quad \mid :(-1)$$
$$y = 12$$

Mit (II) ergibt sich x = 18 + 12 = 30. Somit ist Tim heute 30 Jahre alt und Jasmin 12.

Wenn ihr noch keine quadratischen Gleichungen behandelt habt, dann könnt ihr diesen Punkt überspringen:

Beispiel für nichtlineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekanten:
Die Fläche eines Rechtecks beträgt 40cm^2 und der Umfang 26cm. Wie lange sind die Seien des Rechtecks?

Es gilt für die Fläche A eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b: $A = a \cdot b$
Für dessen Umfang gilt: $U = 2a + 2b$

Wir rechnen ohne Einheiten:

$$\text{(I)} \quad a \cdot b = 40$$
$$\text{(II)} \quad 2a + 2b = 26$$

Nun können wir z.B. die Gleichung (I) nach b auflösen: (III) $b = 40/a$

Dies können wir in (II) einsetzen: $2a + 2 \cdot 40/a = 26$

Immer wenn die Unbekannte im Nenner auftaucht, sollte man die Gleichung mit dem Nenner multiplizieren:

$$2a + 80/a = 26 \mid \cdot a$$
$$2a^2 + 80 = 26a \mid -26a$$
$$2a^2 - 26a + 80 = 0 \mid : 2$$
$$a^2 - 13a + 40 = 0$$

Diese Gleichung kann man mit der p-q-Formel lösen (diese findet ihr unter http://mathe-total.de/Mittelstufe-Aufgaben/Parabeln.pdf auf Seite 8) und man erhält:

$$a_1 = 5 \text{ und } a_2 = 8$$

Mit (III) erhalten wir $b_1 = 40/a_1 = 8$ und $b_2 = 40/a_2 = 5$.

Somit ist eine Seite 5cm lang und die andere 8cm.

Lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

Wir beginnen mit einem **Beispiel**:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 2x - 3y + 2z = 2 \\ \text{(II)} & x - y + 3z = 8 \\ \text{(III)} & -3x + 2y + 2z = 7 \end{array}$$

Zum Lösen diesen Gleichungssystems kann man wie folgt vorgehen: Man wählt, wie bei linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten, eine Variable aus, die eliminiert werden soll. Danach führt man zweimal für je zwei Zeilen das Additionsverfahren bzw. Subtraktionsverfahren durch und eliminiert die ausgewählte Variable, wobei insgesamt alle drei Gleichungen verwendet werden müssen. Damit erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Wir eliminieren x und subtrahieren von (I) das Zweifache von (II) und danach addieren wir das Dreifache der Gleichung (II) zu (III):

$$\text{(I)} - 2\cdot\text{(II)} \qquad -y - 4z = -14 \qquad (*)$$

$$\text{(III)} + 3\cdot\text{(II)} \qquad -y + 11z = 31$$

Nun können wir z.B. die beiden neu entstanden Gleichungen subtrahieren (falls wir als nächstes y eliminieren möchten) und erhalten

$$\begin{aligned} -15z &= -45 \quad | :(-15) \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Nun können wir z = 3 in eine der beiden Gleichungen mit nur 2 Unbekannten einsetzen. Wir setzen z = 3 in die Gleichung (*) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} -y - 12 &= -14 \quad | +12 \\ -y &= -2 \quad | : (-1) \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Nun können wir die Lösung für y und z in eine der drei Gleichungen (I), (II) oder (III) einsetzen und erhalten x. Wir setzen in (II) ein:

$$\begin{aligned} x - 2 + 3\cdot 3 &= 8 \\ x + 7 &= 8 \quad | -7 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Somit ist x =1, y = 2 und z = 3, also ist $\mathbb{L} = \{(1; 2; 3)\}$.

Analog würde man bei 4 Unbekannten und 4 Gleichungen erst eine Variable eliminieren und aus 4 Gleichungen mit 4 unbekannten 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten erhalten.

Falls nicht alle Variablen in jeder Gleichung „vorkommen“, hat man Schritte gespart, wenn man zunächst eine fehlende Variable eliminiert.

Z.B. bei:

$$\begin{array}{lr} \text{(I)} & 2y + z = 3 \\ \text{(II)} & 2x + 3y + z = 7 \\ \text{(III)} & -2x + 2y + 4z = -2 \end{array}$$

Hier sollte man x eliminieren. Da die Gleichung (I) „kein x enthält“ muss man nur noch die Gleichungen (II) und (III) addieren und man hat zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten y und z.

Bemerkung: Den Gauß-Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssystem findet ihr auf Seite 18 unter http://mathe-total.de/LA-Skript/AG-Skript.pdf . Dieser wird aber in der dort beschriebenen Version (mit Tableau) oft erst in der Oberstufe behandelt.