Rechnen mit Variablen

Zusammenfassen von Termen
Gleiche Variablen und Produkte gleicher Variablen können zusammengefasst werden, d.h. sie können addiert oder subtrahiert werden:

Beispiele:
$4a + 3a = 7a$

$2b - 3b = -1b = -b$

$4a + 3b + 2a - 8b = 4a + 2a + 3b - 8b = 6a - 5b$

$2x + 3y + 5xy + 9x - y = 11x + 2y + 5xy$

$15 - 8x + 10 + 2x = 25 - 6x$

$5x^2 + 8xy + 3x^2 + 2xy = 8x^2 + 10xy$

Bemerkungen:
1) Es gilt das folgende Gesetz (Kommutativgesetz):

$a \cdot b = b \cdot a$

2) Damit die Übersicht größer ist, sortiert man aber bei Termen die Variablen alphabetisch. Außerdem kann man den Malpunkt, wie wir es bereits oben getan haben, weg lassen:

$4 \cdot x = 4x$

3) Statt 1x schreibt man x. Weiterhin gilt somit:

$$1/5a = \frac{a}{5}$$

$$\frac{ab}{4} = 1/4ab = \frac{a}{4}b$$

Aufgaben:
a) $x + 4x$
b) $3x - 8y + 2x - 4y$
c) $2a + 8b - 10a + 12b$
d) $10xy + 8x + 15xy - 2x + 4y$
e) $9a^2 - 7a + 2a^2 + 2a$
f) $5a + 3 + 2a + 7$

Lösungen:
a) $5x$
b) $5x - 12y$
c) $-8a + 20b$
d) $25xy + 6x + 4y$
e) $11a^2 - 5a$
f) $7a + 10$

Das Distributivgesetz

Das Distributivgesetz lautet wie folgt:

$a(b + c) = ab + ac$

Beispiele:
$4(2x + 3y) = 4 \cdot 2x + 4 \cdot 3y = 8x + 12y$

$-(x - 2y) = -x + 2y$

$-5(3a - 2b) = -15a + 10b$

$$\frac{a+b}{4} = (a+b)/4 = a/4 + b/4$$

Ausklammern

Das Distributivgesetz wird auch beim Ausklammern verwendet. Dabei werden gemeinsame Teiler ausgeklammert. Z.B. haben bei dem Term $10x + 15y$ beide Summanden den Teiler 5. Dadurch könnte man für den Term auch $5(10/5x + 15/5y) = 5(2x + 3y)$ schreiben.

Beispiele:
$4x + 8y = 4(x + 2y)$

$20 + 40a = 20(1 + 2a)$

$4x^2 + 8x = 4x(x + 2)$

Bemerkungen:
1) Es gilt:
$x \cdot x = x^2$
$x \cdot x \cdot x = x^3$

2) x^2 sollte nicht mit $2x = x + x$ verwechselt werden.

3) Beim Zusammenfassen wird das Distributivgesetz verwendet: $4a + 6a = a(4 + 6) = 10a$

4) Aus dem Distributivgesetz folgt $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$, d.h. hier muss man insgesamt 4 Produkte bilden.

Aufgaben:
1) Löse die Klammern auf und fasse - wenn möglich - zusammen:
a) $5(x + 3)$
b) $-(-x -4y)$
c) $4(2a - 3b)$
d) $2x(x + 3y)$
e) $-3(-2a + 3b + c)$
f) $4(3y + 2z) + 2(3x - 5z)$
g) $5(8a - 2b) - 5(3a + 4b)$
h) $(4 - 3x)(2 + 4x)$
i) $(2a - 3b)(2a + 3b)$

2) Klammere gemeinsame Faktoren aus:
a) $5x + 10y$
b) $-15a + 10b$
c) $6x + 9y + 12z$
d) $4 - 8a$
e) $-12a^2 + 24a$
f) $6x - 12xy + 15x^2$
g) $25u - 30v + 20w$

Lösungen:
1)
a) $5x + 15$
b) $x + 4y$
c) $8a - 12b$
d) $2x^2 + 6xy$
e) $6a - 9b - 3c$
f) $12y + 8z + 6x - 10z = 6x + 12y - 2z$
g) $40a - 10b - 15a - 20b = 25a - 30b$
h) $8 + 16x - 6x - 12x^2 = -12x^2 + 10x + 8$
i) $4a^2 + 6ab - 6ab - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$

2)
a) $5(x + 2y)$
b) $5(-3a + 2b)$
c) $3(2x + 3y + 4z)$
d) $4(1 - 2a)$
e) $12a(-a + 2)$
f) $3x(2 - 4y + 5x)$
g) $5(5u - 6v + 4w)$

Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

Wir betrachten die Gleichung:

$$x + 4 = 5$$

Eine solche Gleichung kann systematisch gelöst werden, indem auf beide Seiten der Gleichung dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert wird. Oder man multipliziert beide Seiten (d.h. aber komplett jeweils eine Seite) mit einer Zahl ungleich Null oder dividiert durch diese. Dadurch wird die Lösung nicht verändert und man spricht von einer Äquivalenzumformung. Nun könnte man die obige Gleichung lösen, wenn man von beiden Seite 4 subtrahiert.

$$x + 4 - 4 = 5 - 4$$

$$x = 1$$

Man schreibt bei einer solchen Umformung die Zahl, die subtrahiert, addiert, mit der multipliziert oder durch die dividiert wird, hinter einen senkrechten Strich rechts neben die Gleichung (mit der zugehörigen arithmetischen Operation):

$$x + 4 = 5 \quad | -4$$

$$x = 1$$

Bei der nächsten Gleichung müssen wir durch 4 dividieren:

$$4x = 20 \quad | :4$$

$$x = 5$$

Die Lösung kann man auch in Form einer Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = \{5\}$

Weitere **Beispiele**:

$$2x + 4 = 20 \quad | -4$$

$$2x = 16 \quad | :2$$

$$x = 8$$

Also: $\mathbb{L} = \{8\}$

$$-4x + 10 = 2 \quad | -10$$

$$-4x = -8 \quad |: (-4)$$

$$x = 2$$

Also: $\mathbb{L} = \{2\}$

Bei der nächsten Gleichung sollte man (wie oben) alle „Terme mit x" auf eine Seite bringen und alle „ohne x" auf die andere. Dividiert wird dann immer zum Schluss.

$$5x + 8 = 6x + 9 \mid -6x$$

$$-x + 8 = 9 \quad \mid -8$$

$$-x = 1 \quad \mid :(-1) \text{ oder } \cdot(-1)$$

$$x = -1$$

Also: $\mathbb{L} = \{-1\}$

$$x/4 = 2 \quad \mid \cdot 4 \qquad (\text{oder } :1/4)$$

$$x = 8$$

Also: $\mathbb{L} = \{8\}$

Bei der nächsten Gleichung sollte man erst die Klammer auflösen und danach zusammenfassen, bevor man mit den Umformungen beginnt:

$$2(x + 4) - 2 = 10 + 6x + 4$$

$$2x + 8 - 2 = 14 + 6x$$

$$2x + 6 = 14 + 6x \quad \mid -6$$

$$2x = 8 + 6x \quad \mid -6x$$

$$-4x = 8 \quad \mid :(-4)$$

$$x = -2$$

Also: $\mathbb{L} = \{-2\}$

Aufgaben:
Bestimme die Lösungsmenge:
a) $4x = 20$
b) $x + 9 = 15$
c) $2x + 3 = -5$
d) $-4x - 10 = -30$
e) $6x - 8 = 3x + 1$
f) $-2x + 5 = 2x + 21$
g) $3(x - 4) + x = 8$
h) $-(2x - 5) + 2(x + 3) = 4x - 1$
i) $5x + 9 = 5 + 8x$
j) $2x = 9x$
k) $-9x - (2 - 4x) = 1/2$

Lösungen:
a) $\mathbb{L} = \{5\}$
b) $\mathbb{L} = \{6\}$
c) $\mathbb{L} = \{-4\}$
d) $\mathbb{L} = \{5\}$
e) $\mathbb{L} = \{3\}$
f) $\mathbb{L} = \{-4\}$
g) $\mathbb{L} = \{5\}$
h) $\mathbb{L} = \{3\}$
i) $\mathbb{L} = \{4/3\}$
j) $\mathbb{L} = \{0\}$
k) $\mathbb{L} = \{-1/2\}$

Bemerkung zu „Spezialfällen:
Gleichungen können auch keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Hierzu zwei **Beispiele**:

$$3x + 4 = 3x + 5 \quad | -3x$$

$$4 = 5$$

Diese Gleichung ist für keine rationale Zahl (falls die Grundmenge gleich den rationalen Zahlen ist) erfüllt. Die Lösungsmenge ist leer: $\mathbb{L} = \{\}$

$$3x + 4 = 3x + 4 \quad | -3x$$

$$4 = 4$$

Diese Gleichung ist für alle rationale Zahl (falls die Grundmenge gleich den rationalen Zahlen ist) erfüllt: $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$

Falls die Grundmenge die reellen Zahlen bildet, dann wäre natürlich hier $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Zum Schluss kommen noch ein paar Aufgaben zum einsetzen in Terme. Soll z.B. in den Term $T = -2x + 1$ für die Variable x der Wert 3 eingesetzt werden, dann ergibt sich $T = -2 \cdot 3 + 1 = -5$.

Aufgaben:
1) Berechne $T = 3x – 2$ für:
a) $x = 1$
b) $x = -4$
c) $x = 2/3$

2) Berechne $T = -2x + 5$ für:
a) $x = -3$
b) $x = 4$
c) $x = 1/3$

Lösungen:

1)

a) $T = 1$

b) $T = -14$

c) $T = 0$

2)

a) $T = 11$

b) $T = -3$

c) $T = 13/3 = 4\ 1/3$ (Als gemischte Zahl geschrieben.)