Geraden

Eine Gerade wird durch eine Gleichung der Form

$$y = m \cdot x + b \quad \text{bzw. } f(x) = m \cdot x + b$$

beschrieben. Die Schreibweise f(x) = … wird teils erst in der Oberstufe verwendet. b ist der y-Achsenabschnitt, d.h. die Gerade scheidet im Punkt $S_y(0; b)$ die y-Achse. m ist die Steigung. Falls man den Wert von x um 1 erhöht, so nimmt der y-Wert um m zu (oder ab, falls m negativ ist). Für m = 0 verläuft dann die Gerade parallel zur x-Achse (falls auch b = 0 wäre, liegt sie auf der x-Achse).

Soll man die Nullstellen einer Geraden bestimmen, so muss man die Gleichung der Geraden (bzw. y) gleich Null setzen, da die Nullstellen die Schnittpunkte der Geraden mit der x-Achse sind. Eine Gerade kann maximal eine Nullstelle besitzen. Wenn m ungleich Null ist, kann man die Nullstelle wie folgt bestimmen:

$$m \cdot x + b = 0 \qquad | -b$$

$$m \cdot x = -b \qquad | :m$$

$$x = -b/m$$

Somit scheiden die Gerade im Punkt N(-b/m; 0) die x-Achse.

Beispiel:

$y = 2x + 4$

Nullstellen berechnen:

$$2x + 4 = 0 \qquad | -4$$

$$2x = -4 \qquad | :2$$

$$x = -2$$

x = -2 ist Nullstelle bzw. in N(-2; 0) wird die x-Achse geschnitten.

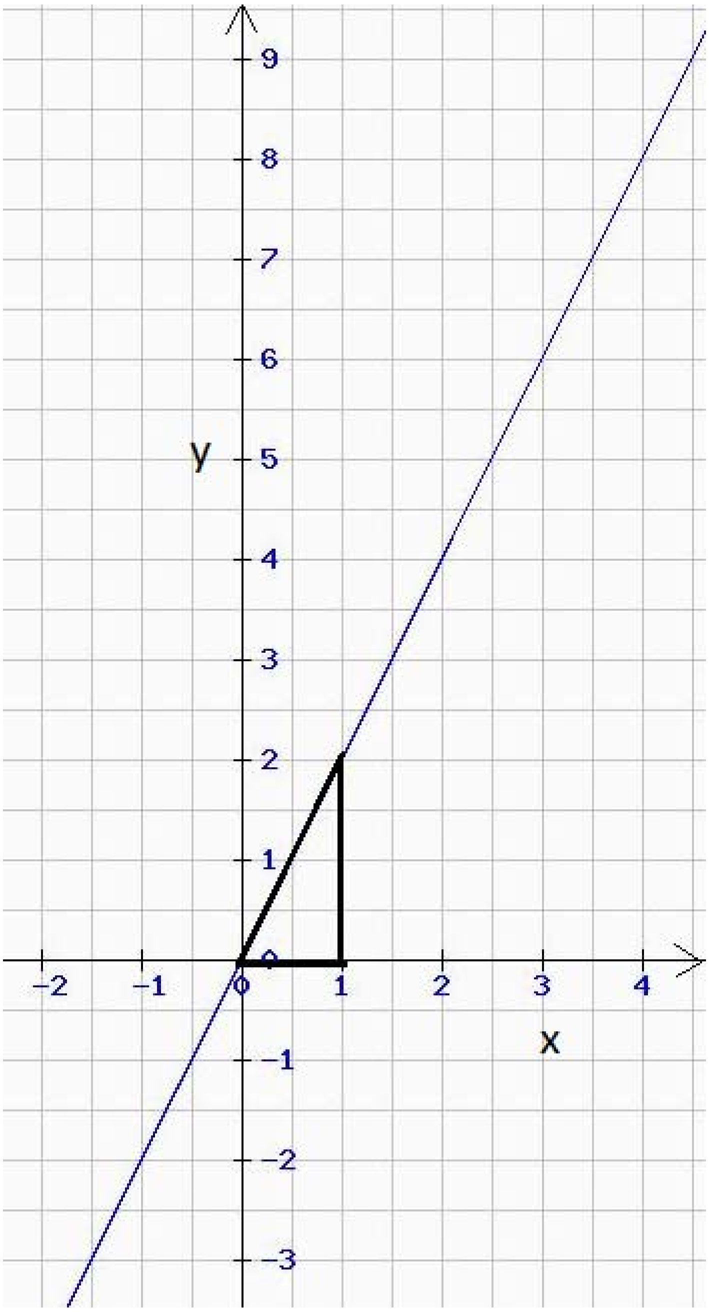
Nun wollen wir einen Graph in einem Beispiel zeichnen.

Beispiele:

$y = 2x$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, die durch den Ursprung (d.h. durch den Punkt P(0;0)) geht. Die Steigung ist 2, d.h. wenn man bei der Gerden eine Einheit nach rechts geht (d.h. parallel zur x-Achse) und 2 Einheiten nach oben (d.h. parallel zur y-Achse), dann erhält man wieder ein Punkt auf der Geraden.

Graph:



Oben wurde das so genannte Steigungsdreieck eingezeichnet, welches nicht zur Geraden gehört, mit dem man aber die Gerade einzeichnen kann. Dazu beginnt man mit dem Schnittpunkt auf der y-Achse. Der y-Achsenabschnitt ist Null (bei $y = 2x$ ist dieser Null, bei $y = 2x + 4$ wäre dieser gleich 4). Somit wird die y-Achse in $S_y(0;0)$ geschnitten. Da die Steigung gleich 2 ist, geht man eine Einheit nach rechts und zwei nach oben). Man landet auf dem Punkt P(1; 2). Nun kann durch die Punkte S_y und P die Gerade einzeichnen.

Wir wollen nun eine Wertetabelle für ganzzahlige Werte von x für $-2 \leq x \leq 4$ erstellen:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y = 2x							

Dazu muss man der Reihe nach die Werte -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 für x in die Funktionsgleichung einsetzen:

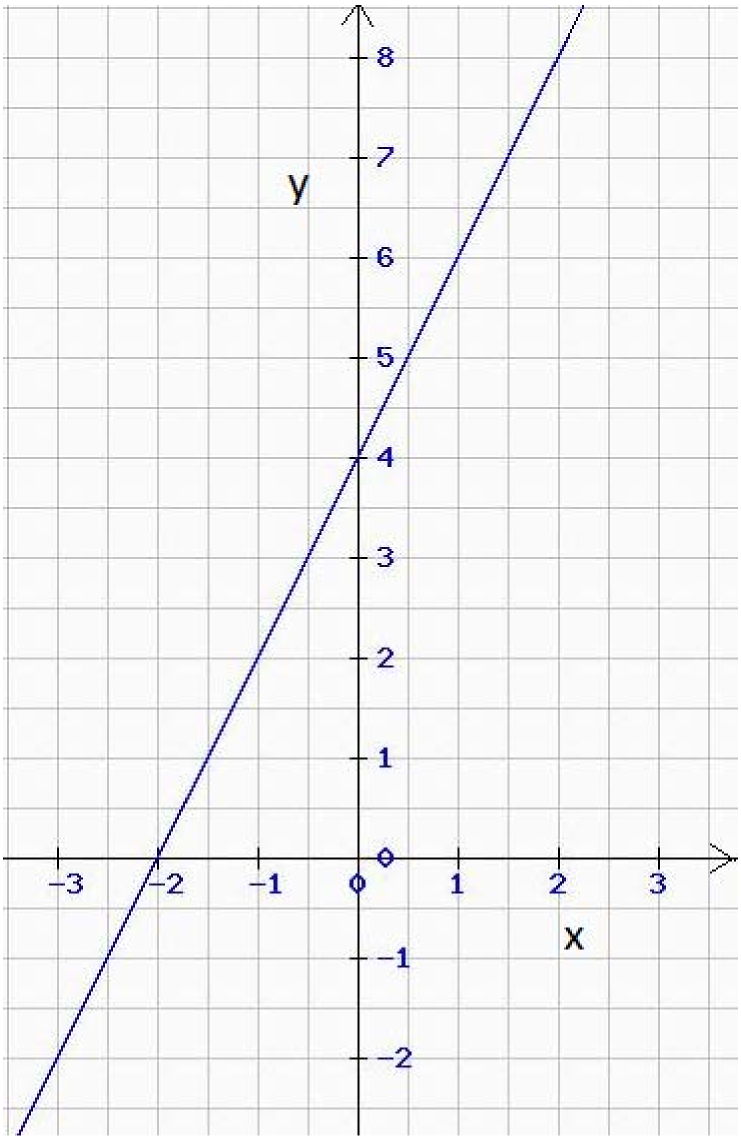
$x = -2 \Rightarrow y = 2\cdot(-2) = -4$

$x = -1 \Rightarrow y = 2\cdot(-1) = -2$

Wie bereits beschrieben, nimmt der Werte für y jeweils um 2 (da die Steigung gleich 2 ist) zu, wenn der Wert von x um eines zunimmt.

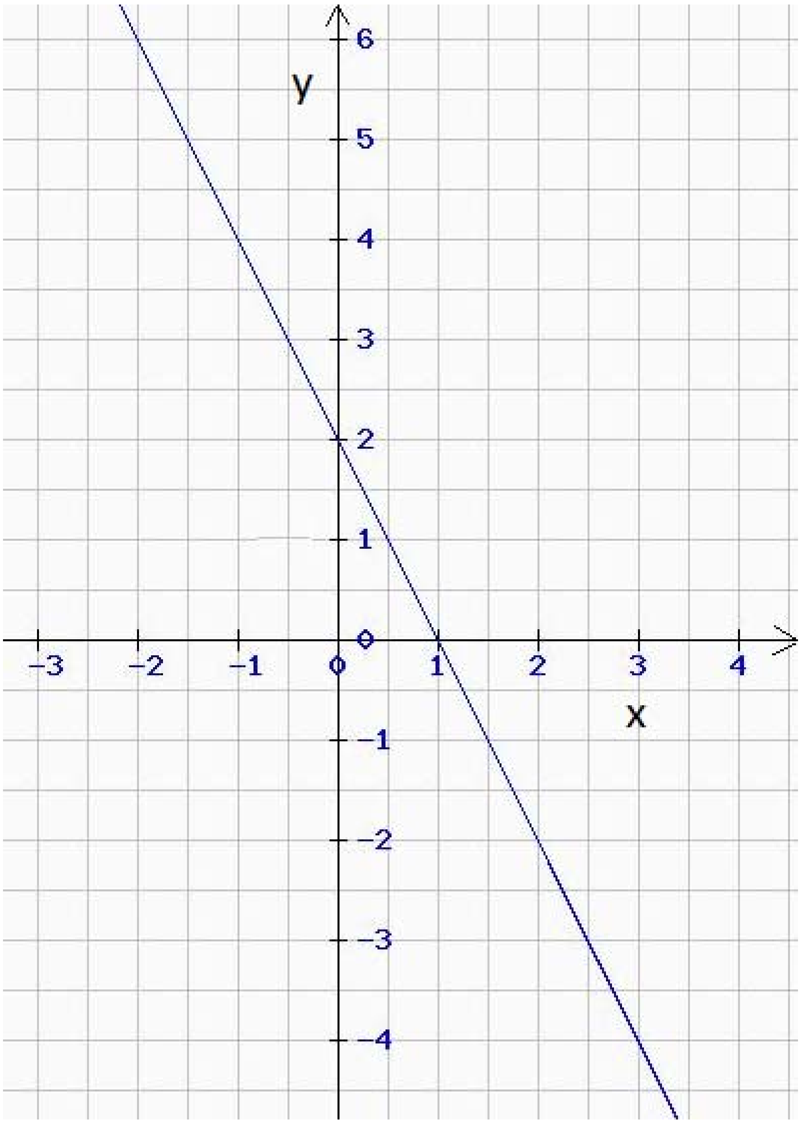
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y = 2x	-4	-2	0	2	4	6	8

Mit zwei Punkten der Wertetabelle hätte man die Gerade auch zeichnen können, z.B. mit (0; 0) und (4; 8). Alle Geraden, die die gleiche Steigung m haben, verlaufen parallel. Wir zeichnen nun noch die Gerade y = 2x + 4:



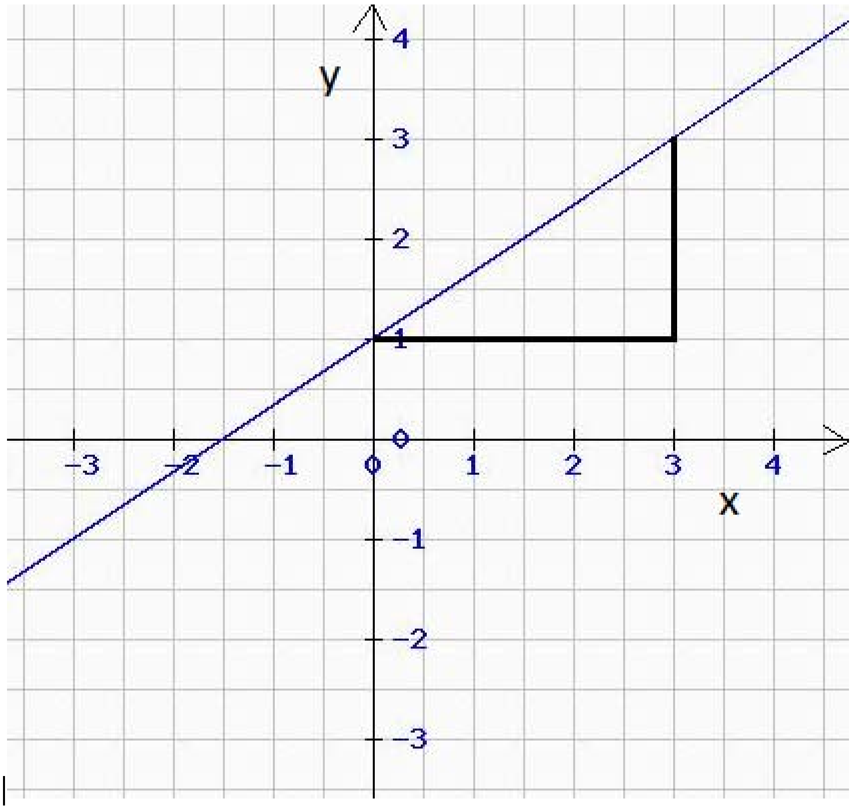
Es folgen **weitere Graphen**:

Hier ist der Graph von y = -2x + 2 zu sehen. Die Steigung ist negativ, womit die Gerade fällt.

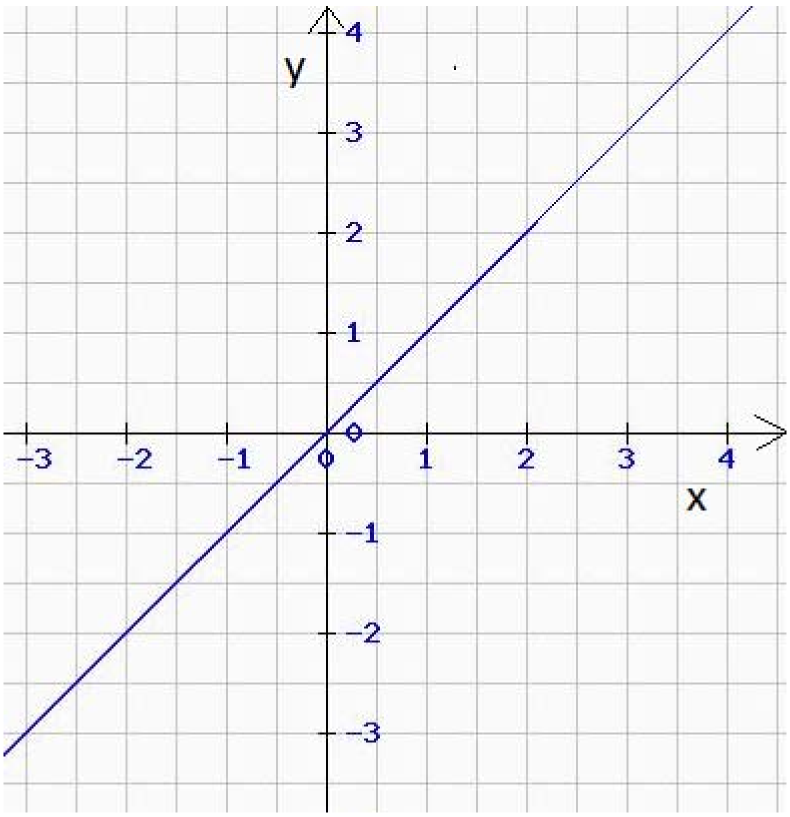


Es folgt der Graph der Funktion y = 2/3x + 1. Hier ist die Steigung gleich 2/3. Man könnte nun zum Einzeichnen der Geraden 1 nach rechts und in etwa 0,67 (ist 2/3 auf zwei Nachkommastellen gerundet) nach oben gehen, was aber zu Ungenauigkeiten führt. Deshalb geht man hier - bei Steigungen in Form von Brüchen - wie folgt vor: Man geht zum Einzeichnen des Steigungsdreieck vom Punkt $S_y(0;1)$ drei nach rechts (also den Nenner des Bruches) und 2 nach oben (also den Zähler des Bruches nach oben und bei negativen Brüchen entsprechend nach unten). Dann landet man auf dem Punkt P(3; 3).

Alternativ könnte man auch zwei Werte für x einsetzen. Z.B. x = 0, womit sich y = 1 ergibt (also der Punkt (0; 1)) und x = 3, womit sich y = 3 ergibt (womit wir den Punkt (3; 3) erhalten).



Zum Schluss noch der Graph von y = x (der ersten Winkelhalbierenden, y = -x wäre die Gleichung der zweiten Winkelhalbierenden). Hier ist die Steigung gleich 1.



Gleichung einer Geraden durch 2 Punkte bestimmen:
Siehe unter http://www.mathe-total.de/Analysis-Aufgaben/Untersuchung-linearer-Funktionen.pdf Aufgabe 2.

Schnittpunkte von Geraden:
Siehe unter http://www.mathe-total.de/Analysis-Aufgaben/Untersuchung-linearer-Funktionen.pdf Aufgabe 4.

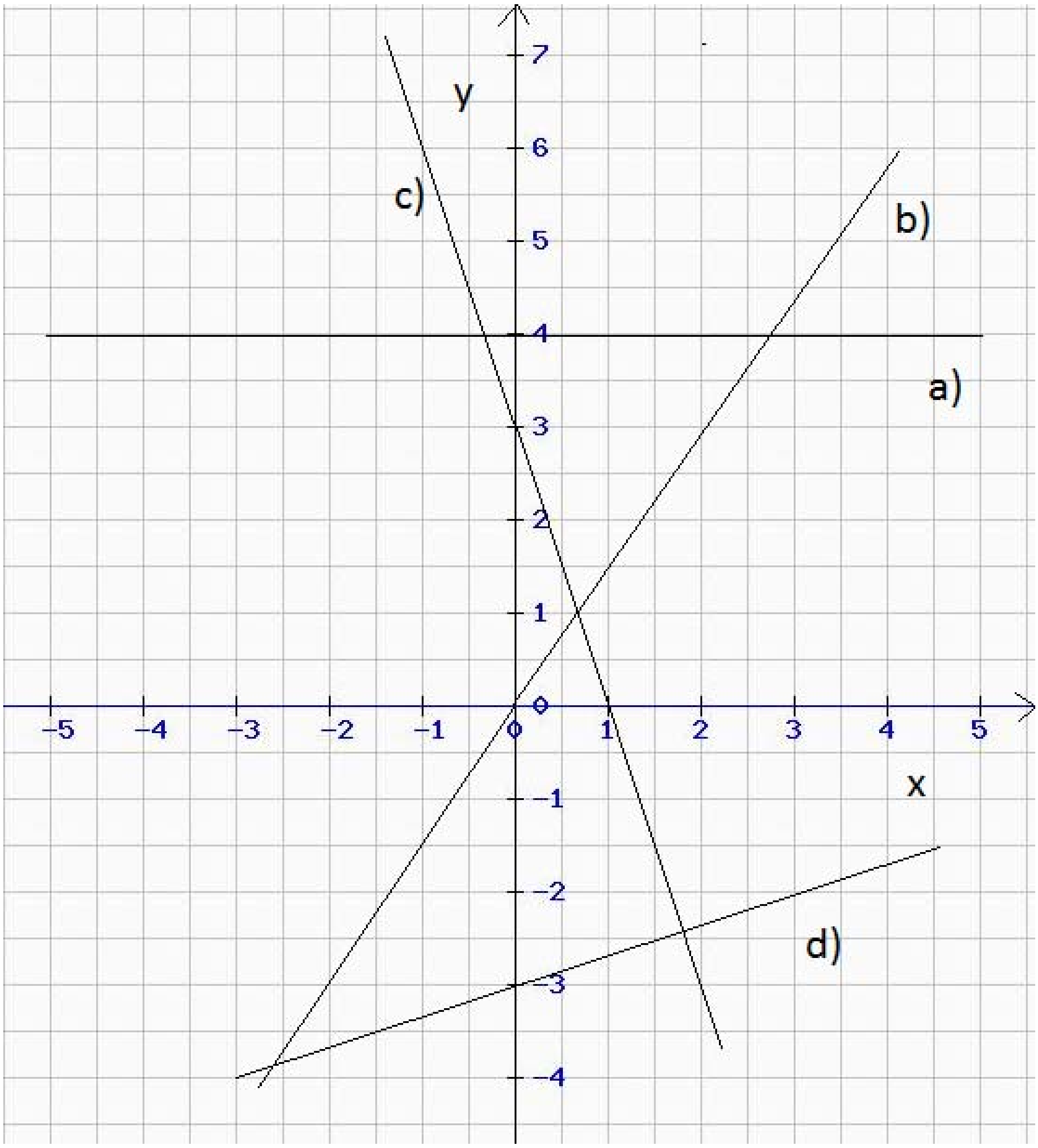
Aufgaben:
1) Liegt der Punkt P(4; 8) auf der Geraden mit der Gleichung $y = -2x + 16$?

2) Bestimme die fehlenden Komponenten für die Gerade mit der Gleichung $y = 2x – 4$:
a) P(8; ?)
b) Q(-2; ?)
c) R(?; 6).

3) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die die Steigung $m = 4$ hat und durch den Punkt P(2; -4) geht.

4) Wie lauten die Nullstellen der Geraden mit den Gleichungen:
a) $y = -3x + 9$
b) $y = 1/3x – 1$
c) $y = 10x – 5$

5) Wie lauten die Geradengleichungen zu folgenden Graphen:



Lösungen:

1) Setze x = 4 in die Geradengleichung ein: $y = -2\cdot 4 + 16 = 8$, somit ergibt sich der richtige y-Wert und P(4; 8) liegt auf der Geraden.

2) a) P(8; ?), also ist x = 8: $y = 2\cdot 8 – 4 = 12$. Der Punkt ist R(8; 12).
   b) Q(-2; ?), also ist x = -2: $y = 2\cdot(-2) – 4 = -8$. Der Punkt ist Q(-2; -8).
   c) R(?; 6), also ist y = 6: Die Gleichung $6 = 2\cdot x – 4$ muss nach x aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 6 &= 2\cdot x - 4 \quad &| +4 \\ 10 &= 2\cdot x \quad &| : 2 \\ 5 &= x \end{aligned}$$

Der Punkt ist R(5; 6).

3) Da m = 4 ist, lautet die Gleichung $y = 4x + b$. b muss bestimmt werden. Wir kennen den Punkt P(2; -4) auf der Geraden. Somit muss die Geradengleichung für x = 2 und y = -4 erfüllt sein:

$-4 = 4 \cdot 2 + b$
$-4 = 8 + b \quad | -8$
$-12 = b$

Also ist $y = 4x - 12$ die gesuchte Geradengleichung.

4) Nullstellen:

a) $-3x + 9 = 0 \quad | -9$
$-3x = -9 \quad | :(-3)$
$x = 3$

b) $1/3x - 1 = 0 \quad | +1$
$1/3x = 1 \quad | :1/3$ oder $\cdot 3/1$
$x = 3$

c) $10x - 5 = 0 \quad | +5$
$10x = 5 \quad | :10$
$x = 1/2$

4) a) $y = 4$
b) $y = 1,5x$
c) $y = -3x + 3$
d) $y = 1/3x - 3$