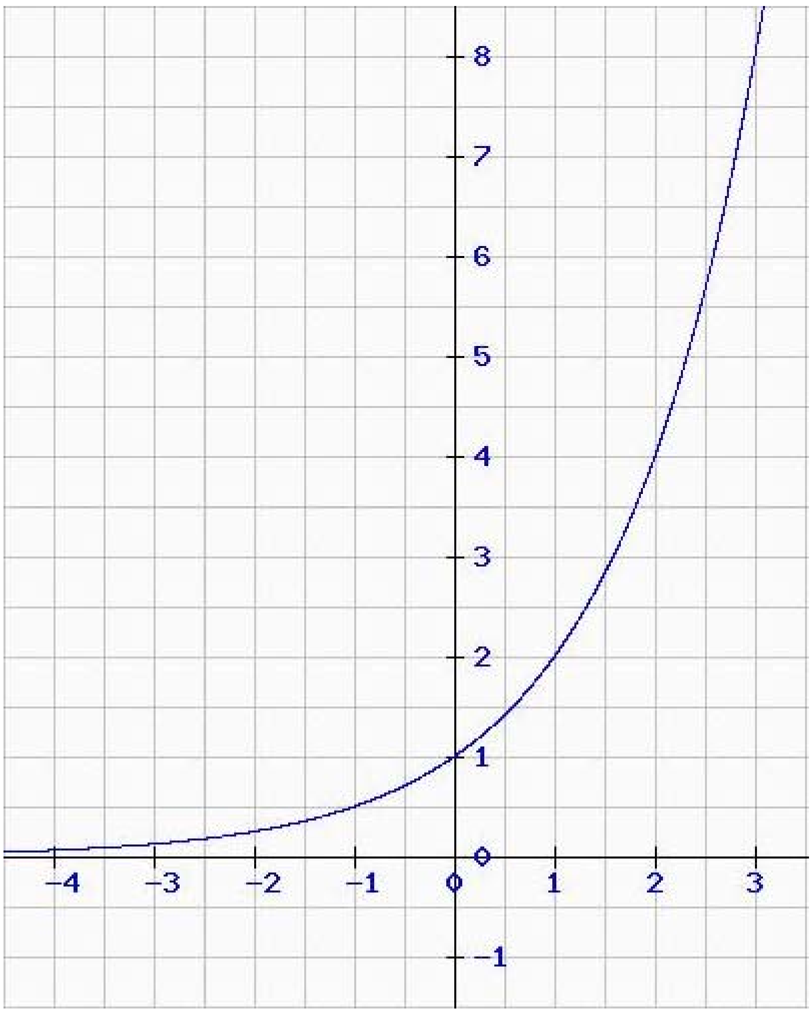
Exponentialfunktionen

Eine Exponentialfunktion ist gegeben durch:

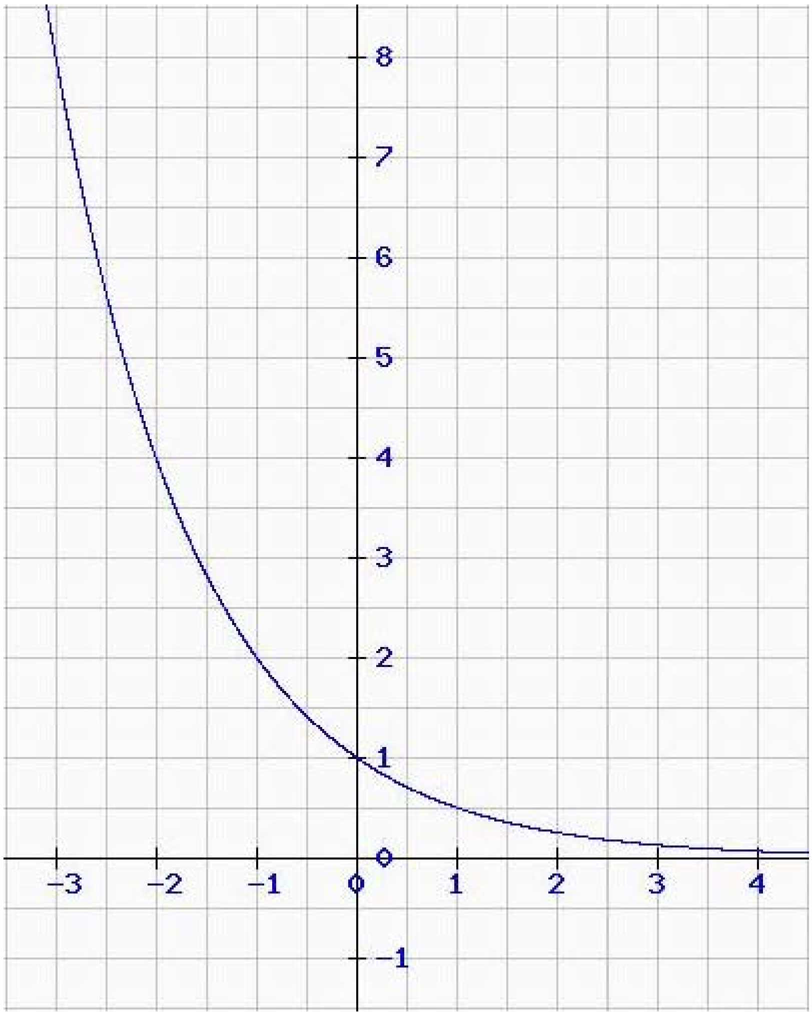
$$f(x) = a^x \text{ mit } a > 0 \text{ (und } a \neq 1).$$

Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$ und der Wertebereich ist $\mathbb{R}^+$, denn es gibt nur positive Funktionswerte und somit auch keine Nullstellen. Die Asymptote liegt hier auf der x-Achse, denn für $a > 1$ und x gegen $-\infty$ geht f(x) gegen Null, wie auch für $0 < a < 1$ und x gegen ∞.

Hier gilt $f(0) = a^0 = 1$. Somit wird die y-Achse immer im Punkt $S_y(0; 1)$ geschnitten. Für $a > 1$ ist die Exponentialfunktion streng monoton steigend. Die folgende Grafik zeigt $f(x) = 2^x$:



Für $a < 1$ (und $a > 0$) ist die Exponentialfunktion streng monoton fallend. Die Grafik zeigt $f(x) = (1/2)^x = 2^{-x}$:



Die Grafen von $f(x) = a^x$ und $g(x) = (1/a)^x = a^{-x}$ ergeben sich jeweils durch eine Spiegelung des einen Grafen an der y-Achse (siehe die beide oberen Grafiken).

Eine „allgemeiner“ Darstellung der Exponentialfunktion ist die folgende:

$$f(x) = b \cdot a^x \text{ mit } a > 0.$$

Hier wird die y-Achse vom Graf im Punkt $S_y(0; b)$ geschnitten. Wir wollen nun allgemein die Wertetabelle darstellen (für x = -2, -1, …, 3):

X	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	$b \cdot a^{-2}$	$b \cdot a^{-1}$	b	$b \cdot a$	$b \cdot a^2$	$b \cdot a^3$

Vergleicht man x mit x + 1, so fällt auf, dass für die Funktionswerte sich um den Faktor a unterscheiden, d.h. $f(x + 1) = a \cdot f(x)$.

Es folgen Aufgaben.

Aufgabe 1

Bestimme die Exponentialfunktion (Typ $f(x) = b \cdot a^x$), deren Graph durch die Punkte P(0; 4) und Q(2; 16) verläuft.

Lösung:

Setzt man die Punkte in die Funktionsgleichung $f(x) = b \cdot a^x$ ein, so erhält man ein Gleichungssystem, welches man nach a und b auflösen kann:

$$\begin{aligned} &(1)\ \ f(0) = b \cdot a^0 = 4 \\ &(2)\ \ f(2) = b \cdot a^2 = 16 \end{aligned}$$

Mit (1) ergibt sich b = 4. Setzt man b = 4 in (2) ein, so ergibt sich:

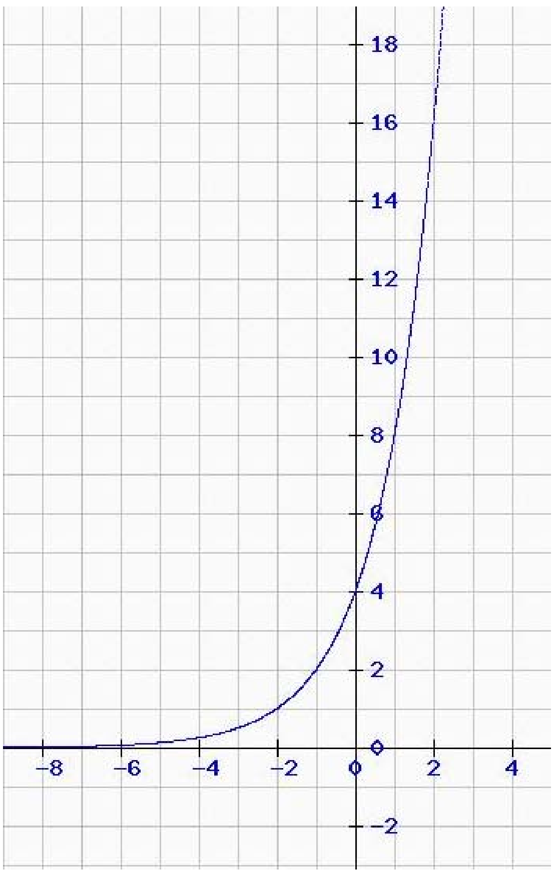
$$4 \cdot a^2 = 16 \mid :4$$

$$a^2 = 4 \mid \sqrt{\ }$$

Somit ist a = 2 (a = -2 ist zwar auch Lösung der Gleichung, hier aber nicht zulässig, da a > 0 sein soll).

Also haben wir die Gleichung:

$$f(x) = 4 \cdot 2^x$$



Aufgabe 2

Gegeben sind die beiden Punkte P(-2; 24) und Q(1; 3) auf dem Graphen einer gesuchten Exponentialfunktion (Typ $f(x) = b\cdot a^x$). Bestimme die Funktionsgleichung.

Lösung:

Hier ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(1) $f(-2) = b\cdot a^{-2} = 24$
(2) $f(1) = b\cdot a^{1} = 3$

Nun kann man eine der beiden Gleichungen nach b auflösen und in die andere einsetzen. Wir lösen z.B. (2) nach b auf und erhalten

(3) $b = 3/a$,

was wir in (1) einsetzten:

$$3/a \cdot a^{-2} = 24$$

$$3\cdot a^{-3} = 24 \mid \cdot a^3$$

$$3 = 24\cdot a^3 \mid : 24$$

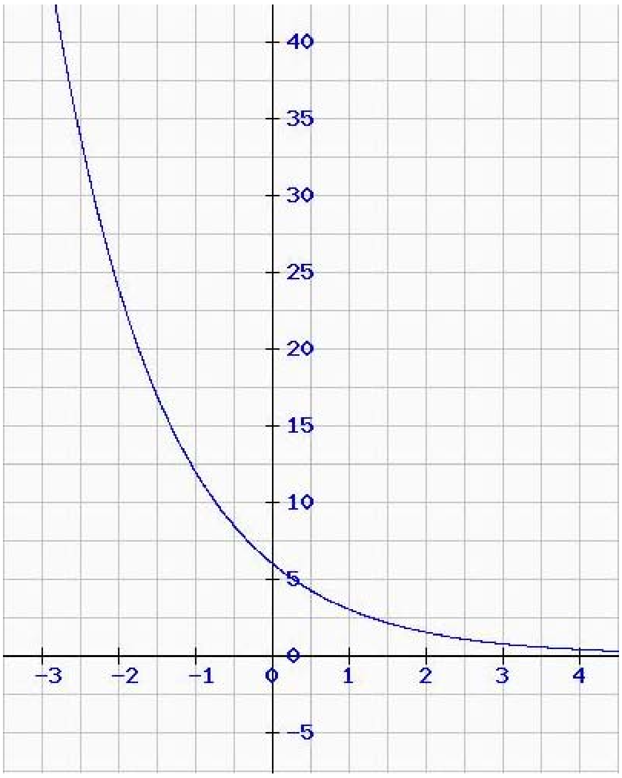
Vertauscht man beide Seiten der Gleichung, erhält man

$$a^3 = 1/8 \mid \sqrt[3]{}$$

$$a = 1/2$$

Setzt man a = 1/2 in (3) ein, so erhalten wir b = 6, somit haben wir die Gleichung:

$$f(x) = 6\cdot(1/2)^x = 6\cdot 2^{-x}$$



Aufgabe 3

Ein Auto wird für 20000 EUR neu gekauft. Wir nehmen an, dass das Auto pro Jahr 20% an Wert verliert.

a) Welche Exponentialfunktion beschreibt dieses Problem?
b) Welchen Wert hat das Auto nach 5 Jahren?
c) Wann ist das Auto nur noch halb so viel wert?

Lösung:

a) Nach einem Jahr ist das Auto nur noch 80% wert, bzw. $20000 \cdot 0{,}8$ EUR. Nach zwei Jahren
wäre es dann wieder nur 80% vom Vorjahr wert, also $20000 \cdot 0{,}8^2$ EUR.

Wir haben somit die folgende Exponentialfunktion, die den Wert des Autos in Abhängigkeit der Zeit t beschreibt (wie lassen der Einfachheit halber die Einheiten weg):

$$f(x) = 20000 \cdot 0{,}8^x$$

b)

$$f(5) = 20000 \cdot 0{,}8^5 = 6553{,}6$$

Also ist es nach 5 Jahren noch 6553,60 EUR wert.

c) $$f(x) = 20000 \cdot 0{,}8^x = 10000 \quad | : 20000$$

$$0{,}8^x = 0{,}5 \mid \lg$$

$$x \cdot \lg(0{,}8) = \lg(0{,}5) \mid : \lg(0{,}8)$$

$$x = \lg(0{,}5)/\lg(0{,}8)$$

$$x \approx 3{,}10628$$

Oben wurde der lg = $\log_{10}$ (d.h. der Logarithmus zur Basis 10) verwendet, man könnte auch einen anderen Logarithmus verwenden. Hat man den $\log_{0,8}$ zur Verfügung, dann ergibt sich direkt $x = \log_{0,8}(0{,}5)$.