Binomische Formeln

Die folgenden drei Formeln sind als die binomischen Formeln in der Schule bekannt:

(1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a + b)(a – b) = a^2 - b^2$

Durch ausmultiplizieren kann man diese leicht herleiten. Z.B..

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Beispiele:

$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

$(x - 2)(x + 2) = x^2 - 2^2 = x^2 – 4$

$-2 \cdot (x -3)^2 = -2 \cdot (x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2) =-2x^2 + 12x - 18$

$(4x + 3y)^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 = 16x^2 + 24xy + 9y^2$

$$\left(x - \sqrt{y}\right)^2 = x^2 - 2x \cdot \sqrt{y} + \left(\sqrt{y}\right)^2 = x^2 - 2x \cdot \sqrt{y} + y$$

$$\left(x + \sqrt{y}\right)\left(x - \sqrt{y}\right) = x^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 = x^2 - y$$

$(2x + 3y)^2 – (3x - 5y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2 – (9x^2 - 30xy + 25y^2)$

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2 – 9x^2 +30xy - 25y^2 = -5x^2 + 42xy -16y^2$

Wie man sieht, würde bei einem dritten Binom (Formel (3)) die Wurzel verschwinden. Dies kann man bei der folgenden Aufgabe verwenden:

Der Nenner soll rational werden (d.h. im Nenner soll keine Wurzel mehr stehen bzw. keine, die eine irrationale Zahl ergäbe):

$$\frac{2}{4 - \sqrt{3}}$$

Hier muss man diesen Bruch so erweitern, dass im Nenner das dritte Binom steht:

$$\frac{2}{4 - \sqrt{3}} = \frac{2(4 + \sqrt{3})}{(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})} = \frac{8 + 2\sqrt{3}}{16 - 3} = \frac{8 + 2\sqrt{3}}{13} = \frac{8}{13} + \frac{2}{13}\sqrt{3}$$

Aufgaben:
a) Wende die binomischen Formeln an:

$(4x + 3)^2$

$(2x - 9)(2x + 9)$

$-5\cdot(x -4)^2$

$(-2x + 5y)^2$

$(-a - b)^2$

$\left(2\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$

$\left(x + 3\sqrt{y}\right)\left(x - 3\sqrt{y}\right)$

$(4x - 2y)^2 + 2(x + 5y)^2$

b) „Rationalisiere" den Nenner:

$$\frac{8}{4-\sqrt{2}}$$

$$\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$$

Lösungen:

a)

$(4x + 3)^2 = 16x^2 + 24x + 9$

$(2x - 9)(2x + 9) = 4x^2 - 81$

$-5\cdot(x - 4)^2 = -5\cdot(x^2 - 8x + 16) = -5x^2 + 40x - 80$

$(-2x + 5y)^2 = (5y - 2x)^2 = 25y^2 - 20xy + 4x^2$

$(-a - b)^2 = (-1)^2(a + b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\left(2\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = \left(2\sqrt{x}\right)^2 - 2\cdot 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} + \left(\sqrt{y}\right)^2 = 4x - 4\sqrt{xy} + y$

$\left(x + 3\sqrt{y}\right)\left(x - 3\sqrt{y}\right) = x^2 - 9y$

$(4x - 2y)^2 + 2(x + 5y)^2 = 16x^2 - 16xy + 4y^2 + 2(x^2 + 10xy + 25y^2) = 18x^2 + 4xy +54y^2$

b)

$$\frac{8\left(4+\sqrt{2}\right)}{\left(4-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)}=\frac{32+8\sqrt{2}}{16-2}=\frac{16}{7}+\frac{4}{7}\sqrt{2}$$

$$\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}=\frac{\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)}{\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)}=\frac{a^2-2a\sqrt{b}+b}{a^2-b}$$

Bemerkung zur Berechnung von $(a + b)^n$ für beliebige (natürliche) Potenzen n:
$(x + y)^3$ könnte man auflösen, wenn man $(x + y)^2 (x + y)$ berechnen würde. Man kann aber auch das so genannte Pascal'sche Dreieck verwenden, in dem man die Koeffizienten für beliebige Potenzen ablesen kann.

Hier ist das Pascal'sche Dreieck bis zur Potenz n = 4 zu sehen:

				1					n = 0
			1		1				n = 1
		1		2		1			n = 2
	1		3		3		1		n = 3
1		4		6		4		1	n = 4

Zur Konstruktion des Pascal'schen Dreiecks: Man beginnt mit den oberen drei Einsen und schreibt links und rechts weitere Einsen hin. Danach erhält man jeweils eine Zeile, wenn man zwischen den Einsen links und rechts jeweils die Zahlen in der Spalte darüber addiert. Diese Summe schreibt man dann immer in die Mitte unter den beiden addierten Zahlen. Für n = 2 ergibt sich die 2 aus der Summe der beiden Einsen darüber, u.s.w..

Nun können wir $(x + y)^3$ berechnen. Wir beginnen in der unteren Summe mit $x^3 = x^3y^0$, danach nimmt der Exponent von x um eines ab und der von y um eins zu, bis man bei y^3 angelangt ist. Vor die Summanden schreibt man dann die Koeffizienten aus dem Pascal'schen Dreieck aus der Zeile für n = 3:

$$(x + y)^3 = 1\cdot x^3 + 3\cdot x^2y + 3\cdot xy^2 + 1\cdot y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Für $(x - y)^3$ geht man genauso vor, nur dass hier das Vorzeichen wechselt, wobei man mit einem positiven Vorzeichen beginnt:

$(x - y)^3 = +1 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 y + 3 \cdot xy^2 - 1 \cdot y^3 = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - y^3$

Noch ein Beispiel:

$(2x + 3y)^3 = 1 \cdot (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 + 1 \cdot (3y)^3$

$= 8x^3 + 36x^2 y + 54xy^2 + 27y^3$