Verschiedene Varianten von Aufgaben zu Parabeln

1) Gesucht werden die Nullstellen der Parabel mit der Gleichung:
   a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$
   b) $f(x) = 5/3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$
   c) $f(x) = - 1/2 \cdot (x + 4)^2 + 8$
   d) $f(x) = 2x^2 - 50$
   e) $f(x) = -3x^2 + 6x$
   f) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

2) Wie lauten die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen der Parabel aus 1a)?

3) Gesucht wird die Funktionsgleichung einer Parabeln mit:
   a) der Form einer Normalparabel, nach oben geöffnet und dem Scheitelpunkt S(-4; 5).
   b) der Form einer Normalparabel, nach oben geöffnet mit den Nullstellen: $x_1 = -5$; $x_2 = 3$.
   c) dem Scheitelpunkt S(3; 2) und Verlauf durch den Punkt P(5; 4).
   d) den Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ und Verlauf durch den Punkt P(3; -6).
   e) Symmetrie zur y-Achse, wobei die x-Achse bei 2 geschnitten wird und die y-Achse bei 8.
   f) der Form einer Normalparabel (nach oben geöffnet) und Verlauf durch P(-2; 12) und Q(1; 3).
   g) dem Verlauf durch die drei Punkte A(1; 10), B(-2; -8) und C(3; 2).

4) Was kann man zur Parabel mit der Gleichung $f(x) = - 1/2 \cdot (x - 4)^2 + 2$ (auf dem ersten Blick) sagen?

5) Es werden die Schnittpunkte und die Lagebeziehung gesucht der Funktionen:
   a) $f(x) = -1/2 \cdot x^2 + 2x + 5$ und $g(x) = 4x - 1$.
   b) $f(x) = -x^2 + 5x + 4$ und $g(x) = -x^2 + 3x$.

6) Für welches b berührt die Gerade mit der Gleichung $g(x) = 2x + b$ die Parabel mit der Gleichung $f(x) = x^2 + 6x + 5$?

7) Gesucht wird der Scheitelpunkt der Parabel mit der Gleichung:
   a) $f(x) =x^2 - 6x + 3$
   b) $f(x) = -x^2 + 4$
   c) $f(x) = 2x^2 - 8x + 10$

Lösung:

1) a) $2x^2 - 4x - 16 = 0 \quad | :2$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 8}$ (da p = - 2, q = -8 und $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$)

$x_{1/2} = 1 \pm 3$

$x_1 = 4$; $x_2 = -2$

b) $5/3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) = 0$

Hier muss nicht ausmultipliziert werden, um die Nullstellen zu bestimmen. Es kann jeder Faktor gleich Null gesetzt werden (wobei natürlich der konstante Faktor 5/3 keinen Einfluss auf die Nullstellen hat):

$x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x_2 = -3$

c) $-1/2 \cdot (x + 4)^2 + 8 = 0$

Wir zeigen 2 Möglichkeiten:

Möglichkeit 1:

$-1/2 \cdot (x^2 + 8x + 16) + 8 = 0$

$-1/2 \cdot x^2 - 4x - 8 + 8 = 0$

$-1/2 \cdot x^2 - 4x = 0 \mid \cdot (-2)$ oder $: (-1/2)$

$x^2 + 8x = 0$

$x \cdot (x + 8) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = -8$

Möglichkeit 2:

$-1/2 \cdot (x + 4)^2 = -8 \quad | \cdot (-2)$

$(x + 4)^2 = 16 \mid \sqrt{}$

$x + 4 = 4$ oder $x + 4 = -4$

Also: $x_1 = 0$; $x_2 = -8$

d) $2x^2 - 50 = 0 \quad | :2$

$x^2 - 25 = 0$ (hier wäre p = 0 und q = 25)

Es ist aber keine p-q-Formel nötig:

$x^2 - 25 = 0 \quad | +25$

$x^2 = \ 25 \quad | \sqrt{\ }$

$x_{1/2} = \pm 5$

e) $-3x^2 + 6x = 0 \quad |:(-3)$

$x^2 - 2x = 0$ (p = -2 und q = 0, einfacher geht es aber hier durch Ausklammern)

$x \cdot (x - 2) = 0$

$x_1 = 0; \ x_2 = 2$

f) $x^2 - 4x + 5 = 0$

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-5}$

$= 2 \pm \sqrt{-1}$ (keine Nullstellen)

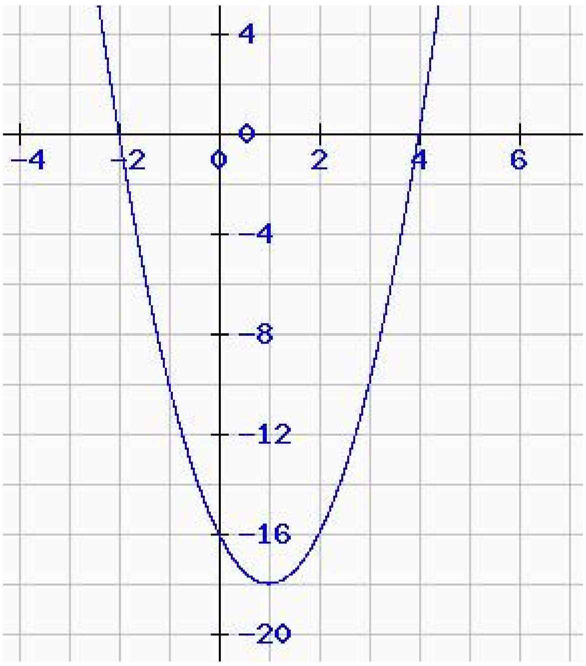
2)

a) Über die Nullstellen erhält man die Schnittpunkte mit der x-Achse: Nullstellen sind $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$, womit sich $N_1(4; 0)$ und $N_2(-2; 0)$ ergeben.

Schnittpunkte mit der y-Achse ist $S_y(0; f(0))$:

$f(0) = - 16 \quad \Rightarrow S_y(0; -16)$

(hätte man auch direkt ablesen können: $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$)



3) a) $f(x) = (x + 4)^2 + 5$

Mit Scheitelpunkt $S(x_s; y_s)$ gilt: $f(x) = a(x + x_s)^2 + y_s$. Hier ist a = 1, denn es handelt sich um eine verschobene Normalparabel.

b) $f(x) = (x - 5) \cdot (x - 3)$
Allgemein gilt mit den Nullstellen x_1 und x_2: $f(x) =a\,(x + x_1) \cdot (x - x_2)$

c) $f(x) = a \cdot (x - 3)^2 + 2$

Da (5; 4) ein Punkt auf der Parabel ist, gilt $f(5) = 4 \Leftrightarrow a \cdot (5 - 3)^2 + 2 = 4$:

$4a + 2 = 4 \mid -2$

$4a = 2$

$a = ½$

Damit gilt: $f(x) = 1/2\cdot(x - 3)^2 + 2$

Falls die Polynomform gesucht worden wäre, hätte man noch ausmultiplizieren müssen:

Es gilt $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$, wegen der binomischen Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$f(x) = 1/2\cdot(x^2 - 6x + 9) + 2$
$= 1/2\cdot x^2 - 3x + 13/2$

d) $f(x) = a \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$

P(3; -6) liegt auf der Parabel, womit f(3) = -6 ist.

$a \cdot (3 - 2) \cdot (3 - 4) = -6$
$a \cdot 1 \cdot (-1) = -6$
$-a = -6 \quad |: (-1)$
$a = 6$

Also: $f(x) = 6 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$

e) $f(x) = ax^2 + c$ („kein x in Gleichung“ bzw. b = 0, wegen der Symmetrie zur y-Achse)

Nullstelle ist x = 2: $f(2) = 0 \Leftrightarrow a\cdot 2^2 + c = 0$
Also ist

$4a + c = 0 \quad (1)$

die erste Gleichung. Bei 8 wird die y-Achse geschnitten: (0; 8) liegt auf der Parabel, womit f(0) = 8:

$a \cdot 0^2 + c = 8 \quad \Leftrightarrow \quad c = 8$

$c = 8$ in (1) einsetzen:

$$4a + 8 = 0$$
$$a = -2$$

Also gilt: $f(x) = -2x^2 + 8$

f) Ansatz: $f(x) = x^2 + bx + c$

Hier ist $a = 1$, da die Form einer Normalparabel entspricht und diese nach oben geöffnet ist (a wäre gleich -1, wenn diese nach unten geöffnet wäre, mit der Form einer Normalparabel).

P(-2; 12): $f(-2) = 12 \Leftrightarrow (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 12 \Leftrightarrow 4 - 2b + c = 12 \quad | -4$

Gleichung (1): $-2b + c = 8$

Q(1; 3): $f(1) = 3 \Leftrightarrow 1^2 + b \cdot 1 + c = 3 \Leftrightarrow 1 + b + c = 3 \quad | -1$

Gleichung (2): $b + c = 2$

(1) $-2b + c = 8$
(2) $b + c = 2$

Subtraktion der Gleichung (2) von (1):

$-3b = 6 \quad | :(-3)$

$b = -2$

$b = -2$ in(2) eingesetzt ergibt: $-2 + c = 2 \quad | +2$

Damit ist $c = 4$ und $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

g) Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

A(1; 10): $f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 10$
B(-2; -8): $f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = -8$ (bei negativem x immer Klammer verwenden)
C(3; 2): $f(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 2$

Damit ergeben sich die 3 Gleichungen:

(1) $a + b + c = 10$
(2) $4a - 2b + c = -8$
(3) $9a + 3b + c = 2$

Wie zu sehen ist, ist der Faktor vor a immer positiv (könnte aber auch 0 sein) und das Vorzeichen des Faktors vor b entspricht dem Vorzeichen von x. Wir subtrahieren jetzt jeweils 2 Gleichungen voneinander, womit jeweils c entfällt:

(4) = (1) – (2): $-3a + 3b = 18$
(5) = (2) – (3) $-5a - 5b = -10$ (beim Vorzeichen aufpassen: $b - (-2b) = 3b$)

Wir wollen b eliminieren:

$-3a + 3b = 18 \mid \cdot 5$
$-5a - 5b = -10 \mid \cdot 3$

$$\begin{array}{rl} -15a + 15b = 90 & \\ \underline{-15a - 15b = -30} & (+) \\ -30a = 60 & \\ a = -2 & \end{array}$$

a = -2 in (4) einsetzen ergibt: $-3 \cdot (-2) + 3b = 18$
$6 + 3b = 18 \mid -6$
$3b = 12$
$b = 4$

Nun setzen wir a = -2 und b = 4 in (1) ein: $-2 + 4 + c = 10 \quad \mid -2$

Damit ist c = 8 und $f(x) = -2x^2 + 4x + 8$.

4) $f(x) = -1/2 \cdot (x - 4)^2 + 2$

Der Faktor vor dem quadratischen Term ist $a = -1/2$. Da dieser negativ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet. Da der Betrag des Faktors a kleiner als 1 ist ($|a| < 1$), ist die Parabel weiter geöffnet als die Normalparabel. Der Scheitelpunkt ist S(4; 2). $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ hat Scheitelpunkt $S(x_s; y_s)$. Hier muss man aufpassen, denn $-x_s$ hat immer ein anderes Vorzeichen wie x_s.

Die Parabel hat damit zwei Nullstellen, denn der Scheitelpunkt S(4; 2) liegt oberhalb der x-Achse und die Parabel ist nach unten geöffnet.

5) a) f(x) = g(x)

$-1/2 \cdot x^2 + 2x + 5 = 4x - 1 \quad \mid -4x + 1$

$-1/2 \cdot x^2 - 2x + 6 = 0 \quad \mid \cdot (-2)$ oder $:(-1/2)$

$x^2 + 4x - 12 = 0$ (nun liegt die Form vor, bei der wir die p-q-Formel anwenden können)

$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 + 12}$

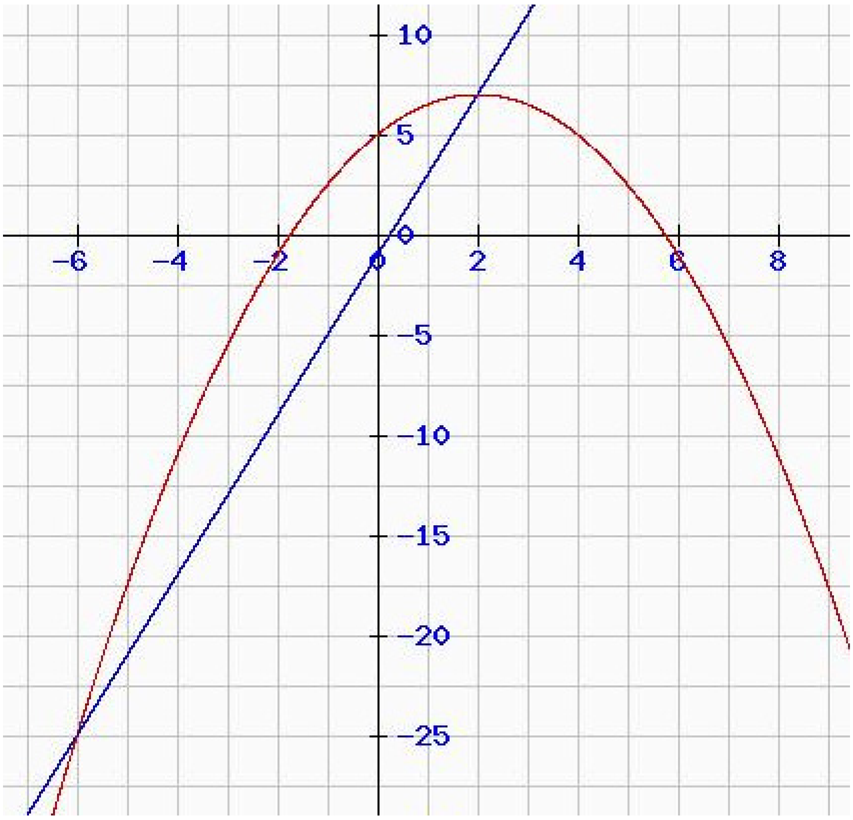
Hier gilt bei der Berechnung der Schnittpunkte von Parabeln und Geraden:
‚Zahl unter Wurzel positiv' bzw. $(p/2)^2 - q > 0 \Rightarrow$ 2 Schnittpunkte (Gerade ist Sekante)
‚Zahl unter Wurzel Null' bzw. $(p/2)^2 - q = 0 \Rightarrow$ Berührpunkt (Gerade ist Tangente)
‚Zahl unter Wurzel negativ' bzw. $(p/2)^2 - q < 0 \Rightarrow$ kein Schnittpunkt (Gerade ist Passante)

Hier war nun $(p/2)^2 - q = 4 + 12 = 16 > 0$, womit es 2 Schnittpunkte gibt.

$x_{1/2} = -2 \pm 4$ womit sich $x_1 = 2$ und $x_2 = -6$ ergibt.

Wir müssen noch die y-Werte(bzw. Funktionswerte) berechnen und damit die x-Werte in die Funktionsgleichung von f oder g einsetzen:

$g(2) = 4 \cdot 2 - 1 = 7 \Rightarrow S_1(2; 7)$
$g(-6) = 4 \cdot (-6) - 1 = -25 \Rightarrow S_2(-6; -25)$



b) $f(x) = g(x)$

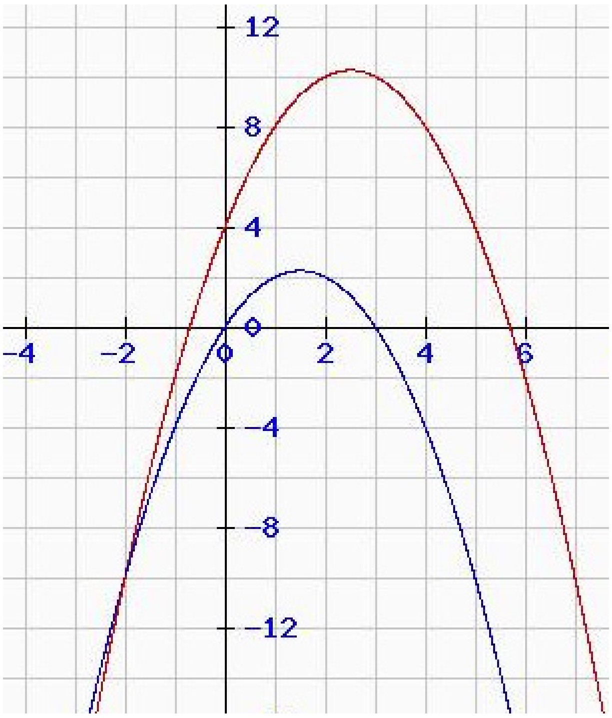
$-x^2 + 5x + 4 = -x^2 + 3x \quad | + x^2$

$5x + 4 = 3x \quad | - 5x$

$4 = -2x \quad | :(-2)$

$x = -2$

Wir berechnen noch den Funktionswert („y-Wert“), indem wir x = -2 in f oder g einsetzen: $g(-2) = -(-2)^2 + 3\cdot(-2) = -10$, womit S(-2; -10) der Schnittpunkt ist. Bei der Berechnung der Schnittpunkte zweier Parabeln kann es neben einem Berührpunkt auch einen einfachen Schnittpunkt geben.



6) f(x) = g(x)

$x^2 + 6x + 5 = 2x + b \;\;|\;\; -2x - b$

$x^2 + 4x + 5 - b = 0$

Hier ist p = 4 und q = 5 – b:

$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - (5 - b)}$

$= -2 \pm \sqrt{-1 + b}$

Damit die Gerade die Parabel berührt, muss -1 + b = 0 gelten, also b = 1.
Für b < 1 gäbe es keinen Schnittpunkt und für b > 1 zwei Schnittpunkte.

7)
a) $f(x) = x^2 - \mathbf{6}x + 3$

$= x^2 - \mathbf{6}x + (\mathbf{6}/2)^2 - (\mathbf{6}/2)^2 + 3$

$= x^2 - \mathbf{6}x + 9 - 9 + 3$

$= (x - (\mathbf{6}/2))^2 - 9 + 3$

$= (x - 3)^2 - 6$

Der Scheitelpunkt ist S(3; 6). Siehe hierzu auch http://www.mathe-total.de/new15b/Erklaerung-zur-quadratischen-Ergaenzung.pdf .

b) $f(x) = -x^2 + 4$
Dies ist schon die Scheitelform und der Scheitelpunkt ist S(0; 4).

c) $f(x) = 2x^2 - 8x + 10$

$= 2\cdot[x^2 - 4x + 5]$ (oder $2\cdot[x^2 - 4x] + 10$)

$= 2\cdot[x^2 - \mathbf{4}x + (\mathbf{4}/2)^2 - (\mathbf{4}/2)^2 + 5]$

$=2\cdot[\, x^2 - \mathbf{4}x + 4 - 4 + 5]$

$=2\cdot[\, (x - (\mathbf{4}/2))^2 - 4 + 5]$

$=2\cdot[\, (x - 2)^2 + 1]$

$= 2\cdot (x - 2)^2 + 2$

Scheitelpunkt ist somit S(2; 2).

Bemerkungen:
1) Bei der Berechnung der Nullstellen mit der p-q-Formel kann man auch den x-Wert des Scheitelpunktes bestimmten, selbst wenn die Funktion keine Nullstellen besitzen würde. Dieser steht vor der Wurzel in der p-q-Formel:

$2x^2 - 8x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0.$

Es gilt: $x_s = -p/2 = -(-4)/2 = 2$. $y_s = f(x_s) = f(2) = 2\cdot 2^2 - 8\cdot 2 + 10 = 2$.
Damit ergibt sich auch S(2; 2).

2) Allgemein gilt: $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ hat den Scheitelpunkt $S(-b/(2a);\ c - b^2/(4a))$.

$f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

$= a\cdot[x^2 + b/a\cdot x + c/a]$

$= a\cdot[x^2 + b/a\cdot x + (b/(2a))^2 - (b/(2a))^2 + c/a]$

$=a\cdot[\, (x + (b/(2a)))^2 - b^2/(4a^2) + c/a]$

$=a\cdot(x +(b/(2a)))^2 - a\cdot b^2/(4a^2) + a\cdot c/a$

$=a\cdot(x + (b/(2a)))^2 - b^2/(4a) + c$