Tipps zur quadratischen Ergänzung und Scheitelpunkte

Bei der quadratischen Ergänzung benötigt man die ersten beiden binomischen Formeln:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Es gilt damit:
$(x - 5)^2 = x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

Was wäre aber, wenn nur ein Teil der rechten Seit der Geleichung bekannt ist:

$(x \ \_\_\_)^2 = x^2 - 8x + \_\_\_$

Wie ergibt sich die Zahl in der Klammer?
Der Faktor vor x, hier -8, muss halbiert werden:

$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + \_\_\_$

$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

Wie würde sich der Summand hinten rechts, d.h. die 16, direkt über den Faktor vor x berechnen lassen: Man müsste den Faktor vor x halbieren und dann quadrieren: $(-8/2)^2 = 16$. Dabei könnte man auch einfach $(8/2)^2 = 16$ berechnen, denn das Quadrat von negativen Zahlen ist positiv.

Wird die Scheitelform benötigt, ergibt sich das gleiche Problem:

$y = x^2 - \mathbf{10}x + 21$

Hier müssen wir zum Ausdruck $x^2 - 10x$ eine Zahl addieren, so dass sich das Ergebnis der ersten oder (hier natürlich) zweiten binomischen Formel ergibt. Dies wäre hier $(\mathbf{10}/2)^2 = 25$. Nun kann aber nicht einfach nur 25 addiert werden, sonst wäre der Term nicht mehr „identisch“:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 21 \\ &= \underline{x^2 - 10x + 25} - 25 + 21 \\ &= \underline{(x-5)^2} - 25 + 21 \\ &= (x-5)^2 - 4 \end{aligned}$$

Nun wurde die Scheitelform bestimmt und der Scheitelpunkt ist damit S(5; -4).

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 12x + 18 \\ &= 2 \cdot [x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2] + 18 \\ &= 2 \cdot [x^2 + 6x + 9 - 9] + 18 \\ &= 2 \cdot [(x+3)^2 - 9] + 18 \\ &= 2 \cdot (x+3)^2 - 18 + 18 \\ &= 2 \cdot (x+3)^2 \end{aligned}$$
hier wäre S(-3; 0) der Scheitelpunkt.

Scheitelpunkt ohne quadratische Ergänzung bestimmen:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Für den x-Wert vom Scheitelpunkt gilt:

$x_s = -\frac{b}{2a} \quad \left(= -\frac{p}{2}\right)$ (p aus der p – q – Formel)

Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 12x + 20$

$x_s = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3$

Setzt man x_s in f(x) ein, ergibt sich y_s:

$y_s = f(x_s) = f(3) = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 20 = 2$

Scheitelpunkt: S(3; 2)

Scheitelform: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit Scheitelpunkt $S(x_s; y_s)$.

a ist auch der Faktor vor x^2, im Beispiel ist a = 2:

$f(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 + 2$

Nun könnte man $f(x) = ax^2 + bx + c$ direkt in die Scheitelform umwandeln:

$f(x) = a(x + b/(2a))^2 + c - b^2/(4a)$

Im Beispiel:
a = 2, b = -12 und c = 20:

$f(x) = 2 \cdot (x + (-12)/(2 \cdot 2))^2 + 20 - (-12)^2/(4 \cdot 2)$
$\quad = 2 \cdot (x - 3)^2 + 20 - 144/8$
$\quad = 2 \cdot (x - 3)^2 + 2$