Tipps zum Zerfall und zur Halbwertszeit

Beispiel 1:

Wir betrachten 100g einer radioaktiven Substanz mit einer Halbwertszeit von 5 Jahren. Gesucht wird die Gleichung vom Typ $f(x) = b \cdot a^x$, wobei x die Anzahl der Jahre und f(x) die nach x Jahren noch vorhandene Menge (in g) dieser Substanz darstellt.

Da der Anfangswert gegeben ist, ist b = 100. Falls kein Anfangswert gegeben ist und nur die Halbwertszeit bekannt ist, kann man auch b = 100 setzen (für 100%, also der Anteil der Substanz zu Beginn). b würde sich auch durch die Gleichung $f(0) = b \cdot a^0 = 100$ ergeben, da $a^0 = 1$ ist.

Also gilt $f(x) = 100 \cdot a^x$. Da nach 5 Jahren nur noch 50g (die Hälfte von 100g) vorhanden sind, gilt:

$f(5) = 100 \cdot a^5 = 50 \quad | :100$

$a^5 = 0{,}5 \mid \sqrt[5]{\ }$

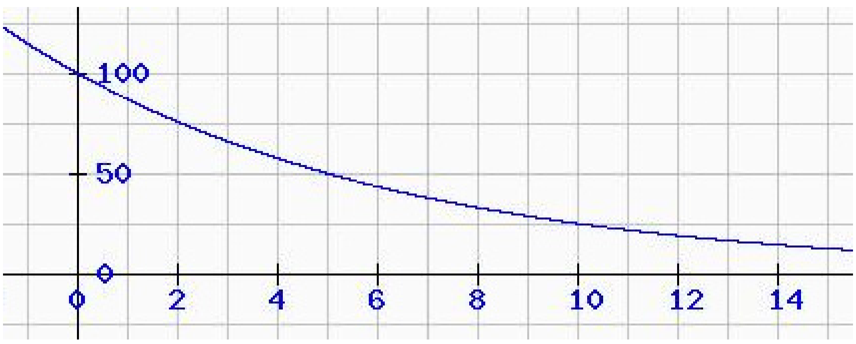
$a = \sqrt[5]{0{,}5}$

Damit gilt: $f(x) = 100 \cdot \left(\sqrt[5]{0{,}5}\right)^x$

Wenn man $\sqrt[5]{0{,}5}$ mit dem Taschenrechner berechnet, sollten möglichst viele Stellen mit angegeben werden. Falls die Funktion für weitere Berechnung verwendet wird, würden sich bei zu wenig Stellen große Rundungsfehler ergeben:

$$f(x) = 100 \cdot \left(\sqrt[5]{0{,}5}\right)^x \approx 100 \cdot 0{,}87055056^x$$

Nach einem Jahr sind dann noch ca. 87,06% vorhanden bzw. ca. 100% - 87,06% = 12,94% zerfallen.



Die Funktionsgleichung kann noch schneller aufgestellt werden, denn es gilt:

$f(x) = M_0 \cdot \left(\sqrt[n]{0{,}5}\right)^x$ wenn M_0 die Anfangsmenge und n die Halbwertszeit ist.

Die Funktionsgleichung kann man auch auf verschiedene Arten darstellen:

$$f(x) = M_0 \cdot \left(\sqrt[n]{0{,}5}\right)^x = M_0 \cdot \left(0{,}5^{1/n}\right)^x = M_0 \cdot 0{,}5^{1/n \cdot x} = M_0 \cdot 2^{-1/n \cdot x}$$

Die Umformungen oben ergeben sich aus den Wurzel- und Potenzgesetzen, denn mit $1/a^n = a^{-n}$ und $(a/b)^n = a^n/b^n$ folgt $0{,}5^{1/n} = 1/0{,}5^{-1/n} = (1/0{,}5)^{-1/n} = 2^{-1/n}$. Außerdem wurde folgendes verwendet: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ und $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Beispiel 2:

Wenn am Anfang 200g vorhanden sind und die Halbwertszeit 8 Jahre beträgt, ergibt sich die Funktionsgleichung:

$$f(x) = 200 \cdot \left(\sqrt[8]{0{,}5}\right)^x \text{ bzw. } f(x) = 200 \cdot 0{,}5^{1/8 \cdot x}$$

Nach beispielsweise 10 Jahren wären dann die Masse (in g) von

$$f(10) = 200 \cdot 0{,}5^{1/8 \cdot 10} \approx 84{,}09$$

vorhanden, also ca. 84,09g.

Bemerkungen:

1) Man kann die Gleichung der Funktion $f(x) = b \cdot a^x$ mit verschiedenen Basen beschreiben, z.B.:

$$f(x) = b \cdot 10^{\log_{10}(a) \cdot x} \text{ oder } f(x) = b \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$$

2) Würde man im Beispiel 1 den Ansatz $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$ verwenden, dann würde sich die Funktionsgleichung

$$f(x) = 100 \cdot e^{\ln(0{,}5^{1/5}) \cdot x} = 100 \cdot e^{1/5 \cdot \ln(0{,}5) \cdot x} \approx 100 \cdot e^{-0{,}13862944 \cdot x}$$

ergeben (da $\log_b(b^a) = b^{\log_b(a)} = a$).

Falls im Unterricht nur die Gleichung vom Typ $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$ verwendet wird, kann auch k wie folgt (im Beispiel 1) bestimmt werden:

$f(5) = 100 \cdot e^{k \cdot 5} = 50 \quad |: 50$

$e^{k \cdot 5} = 0{,}5 \quad | \ \ln(\ )$

$5k = \ln(0{,}5) / 5$

$k = \ln(0{,}5) / 5 \approx -0{,}13862944$

3) Wenn n die Verdopplungszeit bei Wachstumsprozessen ist und M_0 der Anfangswert, dann ergeben sich folgende Funktionsgleichungen:

$$f(x) = M_0 \cdot \left(\sqrt[n]{2}\right)^x, \ f(x) = M_0 \cdot 2^{1/n \cdot x} \text{ oder } f(x) = M_0 \cdot e^{1/n \cdot \ln(2) \cdot x} .$$