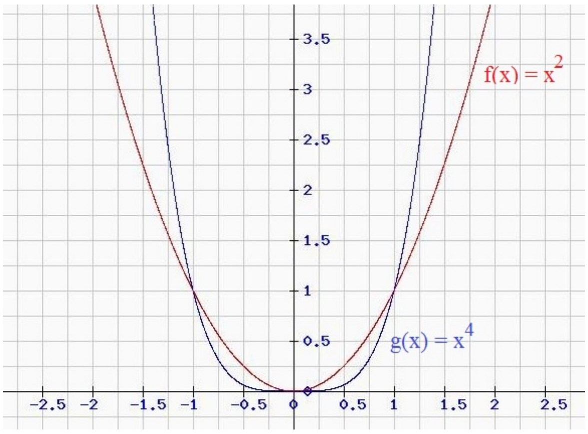
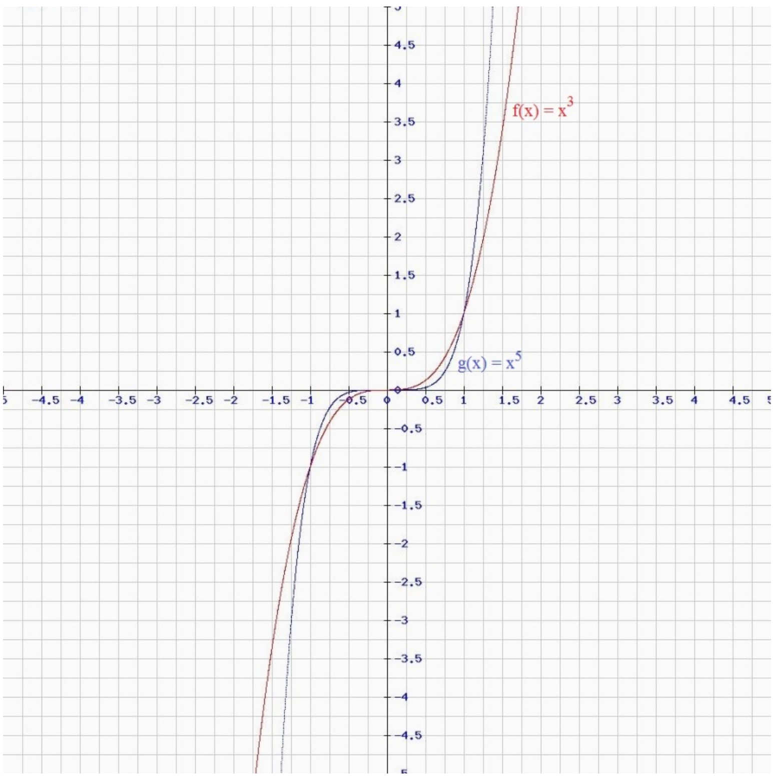
Potenzfunktionen

Wir betrachten im Folgenden Potenzfunktionen vom Typ $f(x) = x^n$, mit ganzzahligen und zunächst nur positiven Exponenten n, und unterscheiden zwischen geraden und ungeraden n. Unten sehen wir die Graphen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^4$:



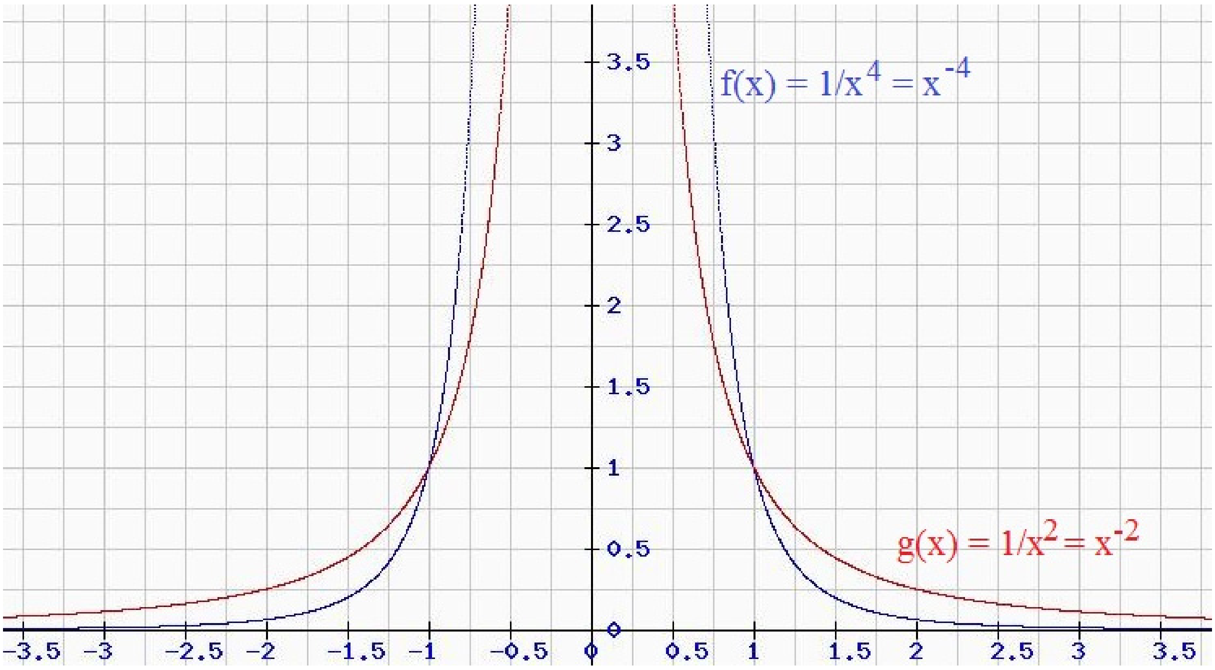
Alle Graphen von Potenzfunktionen haben für gerade positive n drei gemeinsame Punkte: $P_1(-1; 1)$, $P_2(0; 0)$ und $P_3(1; 1)$. Alle diese Graphen sind achsensymmetrisch zur y-Achse, denn f(-1) = f(1), f(-2) = f(2), bzw. allgemein f(-x) = f(x). Wir können jede reelle Zahl für x einsetzen (anders wie bei h(x) = 1/x, wo wir keine 0 für x einsetzen dürfen), womit der maximale Definitionsbereich dieser Funktionen ganz $\mathbb{R}$ ist: $D_f = \mathbb{R}$. Da sich nur y-Werte größer oder gleich Null ergeben können (x^2 wird nicht negativ), ist der Wertebereich $W_f = \mathbb{R}_0^+ = \{y\epsilon\mathbb{R} | \ y \geq 0\} = [0; \infty[$. Für x-Werte zwischen -1 und 1 liegt der Graph von $g(x) = x^4$ unter dem von $f(x) = x^2$, denn z.B. ist $0{,}1^4$ kleine als $0{,}1^2$ ($0{,}1^4 < 0{,}1^2$). D.h. für $|x| < 1$ gilt $f(x) = x^2 > x^4 = g(x)$. Zu sehen ist oben auch, dass $f(x) = x^2 < x^4 = g(x)$ für $|x| > 1$ gilt.

Nun betrachten wir zwei ungerade positive n und legen f und g der Einfachheit halber neu fest:



Zu sehen sind $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^5$. Alle Graphen von Potenzfunktionen haben für ungerade positive n drei gemeinsame Punkte: $P_1(-1; -1)$, $P_2(0; 0)$ und $P_3(1; 1)$. Alle diese Graphen sind punktsymmetrisch zum Ursprung (O(0; 0)), denn f(-1) = -f(1), f(-2) = -f(2), bzw. allgemein f(-x) = -f(x). Der maximale Definitionsbereich dieser Funktionen ist jede reelle Zahl, d.h. $D_f = \mathbb{R}$. Da sich hier auch negative y-Werte ergeben, ist der Wertebereich $W_f = \mathbb{R}$.

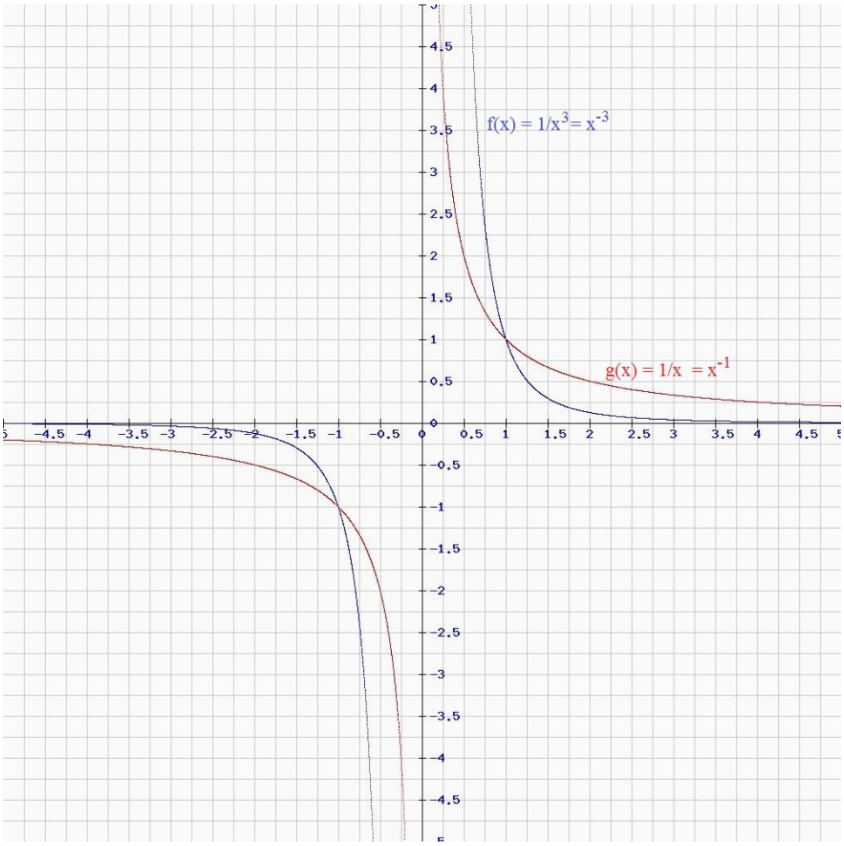
Nun betrachten wir auch negative n und unterscheiden wieder zwischen geraden und ungeraden n. Unten sehen wir die Graphen von $g(x) = x^{-2} = 1/x^2$ und $f(x) = x^{-4} = 1/x^4$:



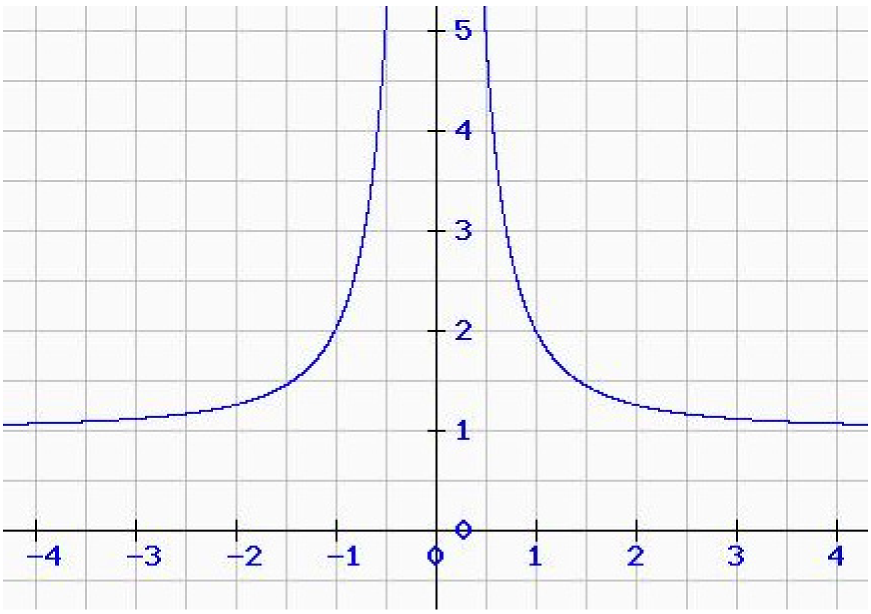
Alle Graphen von Potenzfunktionen haben für gerade negative n zwei gemeinsame Punkte: $P_1(-1; 1)$ und $P_2(1; 1)$. Alle diese Graphen sind achsensymmetrisch zur y-Achse, denn f(-1) = f(1), f(-2) = f(2), bzw. allgemein f(-x) = f(x). Der maximale Definitionsbereich dieser Funktionen ist jede reelle Zahl außer x = 0, d.h. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Null muss hier aus dem Definitionsbereich genommen werden, da durch Null nicht geteilt werden darf. 1/0,1 = 10, 1/0,01 = 100, 1/0,001 = 1000. Wir sehen, je mehr wir uns der Null im Nenner nähern, umso größer wird das Ergebnis (bei negativen Zahlen umso kleiner). Die Funktion strebt an der Stelle x = 0 gegen unendlich (∞). Diese Stelle wird auch Polstelle genannt, oder Singularität. Bei der Funktion h(x) = 1/(x-1) würde dieses Problem bei x = 1 auftreten.

Da sich nur y-Werte größer als Null ergeben, ist der Wertebereich $W_f = \mathbb{R}^+ = \{y \epsilon \mathbb{R} |\, y > 0\} =]0; \infty[$. Zu sehen ist auch, dass $g(x) = x^{-2} > x^{-4} = f(x)$ für |x| > 1. Für x-Werte mit |x| < 1 ungleich Null, gilt $g(x) = x^{-2} < x^{-4} = f(x)$.

Kommen wir zu ungeraden und negativen n. Auf der nächsten Seite sehen wir die Graphen von $g(x) = x^{-1} = 1/x$ und $f(x) = x^{-3} = 1/x^3$. Alle Graphen von Potenzfunktionen haben für ungerade negative n zwei gemeinsame Punkte: $P_1(-1; -1)$ und $P_2(1; 1)$. Alle diese Graphen sind punktsymmetrisch zum Ursprung, denn f(-1) = -f(1), f(-2) = -f(2), bzw. allgemein f(-x) = -f(x). Der maximale Definitionsbereich dieser Funktionen ist jede reelle Zahl außer x = 0, d.h. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hier ergeben sich nun auch negative y-Werte, womit der Wertebereich $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist. Potenzfunktionen mit negativen n haben alle keine Nullstellen.

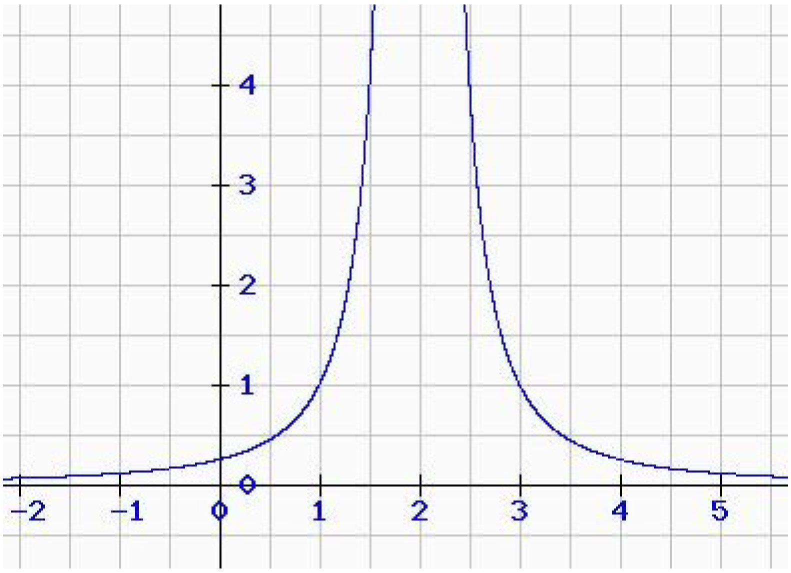


Damit haben wir alle Varianten gesehen. Allgemein kann jeder Graph um eine Einheit in die positive y-Richtung verschoben werden, wenn man statt f(x) den Graph von g(x) = f(x) + 1 betrachtet. D.h. der Graph von $g(x) = x^{-2} + 1$ ergibt sich aus dem Graph von $f(x) = x^{-2}$, wenn man diesen um 1 in die positive y-Richtung, also um 1 nach oben verschiebt.



Die y-Werte von g (auch Funktionswerte von g genannt) nähern sich hier für große oder kleine x-Werte der Gerade y = 1 an. Damit hat g die Asymptote y = 1. Der Definitionsbereich von g ist der gleiche wie bei f, also $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber der Wertebereich hat sich „verschoben“, denn nun ergeben sich nur y-Werte größer als 1: $W_g = \{y \in \mathbb{R} |\ y > 1\} =]1; \infty[$.

Wir können auch Graphen von Funktionen in x-Richtung, also nach rechts oder nach links, verschieben. Beispielsweise kann der Graph einer Funktion auch um 2 Einheiten nach rechts verschoben werden, wenn statt f(x) die Funktion g(x) = f(x-2) betrachtet wird. Hier muss aber, wie zu sehen ist, das Vorzeichen beachtet werden. Soll der Graph um 2 Einheiten nach links verschobene werden, dann verwenden wir h(x) = f(x+2). Unten ist der Graph von $g(x) = (x-2)^{-2}$ zu sehen.

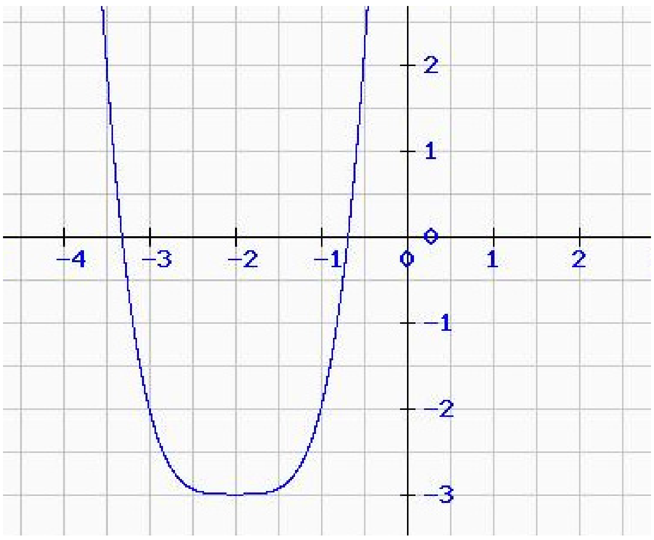


Hier ändert sich der Wertebereich nicht, nur beim Definitionsbereich muss aufgepasst werden, denn hier darf keine 2 für x in g eingesetzt werden, denn bei

$$g(x) = (x-2)^{-2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

würde für x = 2 durch Null geteilt werden, was nicht geht. Aus diesem Grund ist der Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Polstelle ist dann x = 2.

Wir können auch beide Verschiebungen kombinieren. $g(x) = (x+2)^4 - 3$ wäre der Graph von $f(x) = x^4$ um 2 nach links und um 3 nach unten Verschoben.



Hier ist der Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R}$, wie immer bei positiven n, nur der Wertebereich ist $W_g = \{y \epsilon \mathbb{R} \mid y \geq -3\} = [-3; \infty[$.