Oberstufenwissen testen

1) Gesucht sind die Nullstellen:

a) $f(x) = x^3 - 6x$

b) $f(x) = (2x-6) \cdot e^{-4x}$

c) $f(x) = x^4 - 34x^2 + 225$

d) $f(x) = \frac{2x-10}{x^2+3}$

e) $f(x) = 2x^3 - 4a \cdot x^2$

f) $f(x) = 4e^x - e^{3x}$

2) Bestimme die erste Ableitung:

a) $f(x) = x^3 - 1/2 \cdot x^2 + 6x + 2$

b) $f(x) = 2/x^4$

c) $f(x) = e^{3x} - e^{-4x}$

d) $f(x) = (x-3) \cdot e^{2x}$

3) a) Wie muss a gewählt werden, damit $f(x) = x^3 - a \cdot x^2$ an der Stelle $x = 2$ einen Extrempunkt besitzt?
b) Welcher Art ist dieser Extrempunkt (HP/TP) und welche weiteren Extrempunkte liegen vor?

4) Gesucht werden die Extrempunkte von:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2$

b) $f(x) = (-2x+4) \cdot e^{-x}$

5) Welche Fläche schließt die Kurve von $f(x) = -x^2 + 9$ mit der x-Achse ein?

6) Gesucht wird eine Parameterform der Geraden durch A(4; 3; 5) und B(-2; 2; 4).

7) Gesucht wird eine Ebenengleichung in Parametreform und in Koordinatenform der Ebene E durch die Punkte P(2; -4; 2), Q(4; 6; 1) und R(2; 4; 3).

8) Wie groß ist der Abstand des Punktes P(3; -2; 4) von der Ebene E: $3x - 4y = 10$?

Lösungen:

1) Gesucht sind die Nullstellen:

a) $f(x) = x^3 - 6x = 0$

$x^3 - 6x = 0$

$x(x^2 - 6) = 0$

Damit ist $x_1 = 0$ und $x_{2/3}$ ergeben sich durch die Gleichung $x^2 - 6 = 0$.

$x_{2/3} = \pm\sqrt{6} \approx \pm 2{,}45$

b) $f(x) = (2x-6)\cdot e^{-4x} = 0 \iff 2x - 6 = 0$ (oder $e^{-4x} = 0$, was aber keine Lösung hat).

Damit ist $x = 3$ die Nullstelle.

c) $f(x) = x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

Wir haben nur gerade Exponenten bei x vorliegen, damit können wir $x^2 = z$ substituieren, was zu $x^4 = z^2$ führt:

$$z^2 - 34z + 225 = 0$$

Mit der p-q-Formel ergibt sich: $z_{1/2} = 17 \pm 8$, womit $z_1 = 25$ und $z_2 = 9$ ist. Damit ist:

$x_{1/2} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$x_{3/4} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Also 4 Nullstellen.

d) $f(x) = \frac{2x-10}{x^2+3} = 0 \iff 2x - 10 = 0$, also $x = 5$.

Da der Nenner nicht Null werden kann gilt $\iff$ oder allgemein, wenn der Nenner nicht an derselben Stelle Null wird wie der Zähler, sonst würde bei $x = 5$ eine Definitionslücke vorliegen, was hier aber natürlich nicht der Fall ist (dies wäre z.B. bei $f(x) = (x-5)/(x^2 - 25)$ der Fall).

e) $f(x) = 2x^3 - 4a\cdot x^2 = 0 \quad | : 2$

$x^3 - 2a\cdot x^2 = 0$

$x^2(x - 2a) = 0 \iff x^2 = 0$ oder $x - 2a = 0$

$x_{1/2} = 0$ (doppelte Nullstelle bei $x = 0$, die für $a = 0$ zur dreifachen Nullstelle werden kann)

$x_3 = 2a$

f) $f(x) = 4e^x - e^{3x} = 0 \quad | + e^{3x}$

$4e^x = e^{3x} \quad | : e^x$

$4 = e^{2x} \quad | \ln(\ )$ (da $e^a : e^b = e^{a-b}$)

$\ln(4) = 2x \quad | : 2$

$x = \ln(4)/2 \approx 0{,}69$

2) Bestimme die erste Ableitung:

a) $f(x) = x^3 - 1/2 \cdot x^2 + 6x + 2$
$f'(x) = 3x^2 - x + 6$

b) $f(x) = 2/x^4 = 2x^{-4}$
$f'(x) = -8x^{-5} = -8/x^5$

c) $f(x) = e^{3x} - e^{-4x}$
$f'(x) = 3e^{3x} + 4e^{-4x}$

d) $f(x) = (x-3) \cdot e^{2x}$ $(u(x) = x - 3,\ v(x) = e^{2x})$
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$
$= 1 \cdot e^{2x} + 2 \cdot e^{2x} \cdot (x-3)$
$= (1 + 2 \cdot (x-3)) \cdot e^{2x}$
$= (2x - 5) \cdot e^{2x}$

3) a) Wie muss a gewählt werden, damit $f(x) = x^3 - a \cdot x^2$ an der Stelle x = 2 einen Extrempunkt besitzt? Wenn an der Stelle x = 2 ein Extremstelle vorliegen soll, muss notwendigerweise erst einmal f`(2) = 0 sein.

$$f'(x) = 3x^2 - 2a \cdot x$$
$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2a \cdot 2 = 0$$
$$12 - 4a = 0$$

Also muss a = 3 sein.

b) Welcher Art ist dieser Extrempunkt (HP/TP) und welche weiteren Extrempunkte liegen vor?

Wir müssen f''(2) berechnen mit a = 3: $f''(x) = 6x - 2a$, $f''(2) = 12 - 6 = 6 > 0$, also liegt ein Tiefpunkt vor. Es gilt f(2) = -4 mit a = 3, damit ist der TP T(2; -4). Liegen weitere Extrema vor? Wir setzen nochmal f'(x) = 0 mit a = 3:

$f'(x) = 3x^2 - 6 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 6) = 0$, womit x = 0 oder x = 2 (was wir schon wissen) ist.

x = 0 wäre übrigens für alle $a \neq 0$ eine Extremstelle. f''(0) = -6 < 0, also liegt bei x = 0 ein HP vor.
f(0) = 0. Damit ist H(0; 0) der HP.

4) Gesucht werden die Extrempunkte von $f(x) = (-2x+4) \cdot e^{-x}$.

$f(x) = (-2x+4) \cdot e^{-x}$

$u(x) = -2x + 4$ $\quad u'(x) = -2$
$v(x) = e^{-x}$ $\quad v'(x) = -e^{-x}$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = -2 \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot (-2x + 4) = (-2 - (-2x + 4)) \cdot e^{-x} = (2x - 6) \cdot e^{-x}$

Analog: $f''(x) = 2 \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot (2x - 6) = (2 - (2x - 6)) \cdot e^{-x} = (-2x + 8) \cdot e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0$ (und $e^{-x} = 0$, was aber keine Lösung hat)
Damit ist x = 3.

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(3) = 2 \cdot e^{-3} > 0$, also TP.

In $f(x)$ einsetzen: $f(3) = -2 \cdot e^{-3} \approx -0{,}1$. Also ist $E(3; -2 \cdot e^{-3}) \approx E(3; 0{,}1)$ ein TP.

5) Welche Fläche schließt die Kurve von $f(x) = -x^2 + 9$ mit der x-Achse ein?

Wir müssen die Nullstellen bestimmen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{9}$$
$$= \pm 3$$
$$x_1 = 3 \text{ und } x_2 = -3.$$

Nun müssen wir über das Intervall [-3; 3] integrieren. Wäre eine weitere Nullstelle vorhanden, z.B. bei 5, dann müsste nochmal über das Intervall von [3; 5] integriert werden. Die Beträge dieser Flächen werden addiert zur Gesamtfläche.

$$A = \int_{-3}^{3} (-x^2 + 9)\,dx = [-1/3 \cdot x^3 + 9x]_{-3}^{3}$$

$$= -1/3 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3 - (-1/3 \cdot (-3)^3 + 9 \cdot (-3)) = 36 \text{ (FE)}$$

6) Gesucht wird eine Parameterform der Geraden durch A(4; 3; 5) und B(-2; 2; 4).

$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}$.

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2-4 \\ 2-3 \\ 4-5 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7) Gesucht wird eine Ebenengleichung in Parametreform und in Koordinatenform der Ebene E durch die Punkte P(2; -4; 2), Q(4; 6; 1) und R(2; 4; 3).

Wir beginnen mit der Bestimmung der Parameterform:

$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{0P} + r \cdot \overrightarrow{PQ} + s \cdot \overrightarrow{PR}$ mit $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0Q} - \overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{0R} - \overrightarrow{OP}$.

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4-2 \\ 6+4 \\ 1-2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4+4 \\ 3-2 \end{pmatrix}$$

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir könnten auch nochmal eine Probe machen, denn für r = 1 und s = 0 ergibt sich der Orstvektor von Q und für r = 0 und s = 1 der Ortsvektor von R.

Nun bestimmen wir die Koordinatenform. Wir berechnen dazu zunächst den Normalenvektor über das Vektorprodukt (siehe hierzu http://mathe-total.de/LA-Skript/AG-Ebenen.pdf S. 6 (S. 37)):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 1 - (-1) \cdot 8 \\ -1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 8 - 10 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Wenn sich oben ein Normalenvektor mit relativ großen Zahlen ergeben hätte, hätte man den Vektor auch verkürzen können, bevor man dessen Komponenten unten einsetzt.

Wir hätten auch in unserem Fall den Normalenvektor mit ½ multiplizieren können:

$$\vec{n}_{\text{kürzer}} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ebene in Koordinatenform (bzw. eine mögliche Darstellung davon):

E: $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = c$
E: $18x - 2y + 16z = c$

Wir setzen nun einen Punkt von E ein (z.B. P, aus dem Stützvektor):

$18 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) + 16 \cdot 2 = c$
$c = 76$

Damit gilt: E: $18x - 2y + 16z = 76$

Es wäre auch möglich gewesen, erst die Normalform zu bestimmen. Diese hätte dann ausmultipliziert werden können, womit sich die Koordinatenform ergibt. Die Normalform ist übrigens allgemein:

$$\text{E:} \quad (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Dabei ist $\vec{n}$ wieder der Normalvektor von oben (oder ein Vielfaches von diesem) und $\vec{p}$ ein Ortsvektor der Ebene, z.B. der Stützvektor $\overrightarrow{0P}$ von oben. Eine mögliche Darstellung in Normalform von E ist dann:

$$\text{E:} \quad \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix} = 0$$

8) Wie groß ist der Abstand des Punktes P(3; -2; 4) von der Ebene E: 3x – 4y = 10?

Wir bestimmen die Hesse Normalform, wobei wir aber die Koordinatengleichung verwenden, also die ausmultiplizierte Normalform. Wir müssen nur die Koordinatengleichung umformen, dass auf einer Seite ein Null steht und dann durch die Länge bzw. den Betrag des Normalenvektor dividieren:

$$E:\ n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - c = 0 \quad | : |\vec{n}|$$

$$E: \frac{n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - c}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

Der Abstand eines Punktes (x; y; z) zu E ergibt sich dann allgemein durch:

$$d = \left| \frac{n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - c}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$$

In der Aufgabe:

$$E: 3x - 4y = 10$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

Wir setzen den Punkt P(3; -2; 4) in

$$d = \left| \frac{3x - 4y - 10}{5} \right|$$

ein:

$$d = \left| \frac{3 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) - 10}{5} \right| = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

Also beträgt der Abstand des Punktes P zur Ebene E 1,4 LE.