Verschiedene Typen von Exponentialgleichungen lösen

Im Folgenden wird gezeigt, wie verschiedene Typen von Exponentialgleichungen gelöst werden können. Solche Gleichungen können im Zusammenhang mit der Berechnung von Nullstellen oder Extremstellen/Wendestellen bei Exponentialfunktionen auftreten.

Beispiel 1: $4e^{2x} - 16 = 0$

$4e^{2x} - 16 = 0 \quad | + 16$ Es wird erst e^{2x} isoliert.
$4e^{2x} = 16 \quad | :4$
$e^{2x} = 4 \quad | \ln(\,)$
$2x = \ln(4) \quad | :2$

$x = \ln(4)/2$

Bemerkungen:
1) Wenn hier $e^x = -10$ gestanden hätte, gäbe es keine Lösung ($\ln(a)$ existiert im Reellen nur für $a > 0$). e^x ist für reelle x immer positiv und somit gibt es kein reelles x, so dass z.B. $e^x = -10$ gilt. Damit hat $e^x + 10 = 0$ keine Lösung, aber $-e^x + 10 = 0$ ($\Leftrightarrow -e^x = -10 \Leftrightarrow e^x = 10$).

2) Falls es möglich ist, versuchen wir immer $e^{\cdots}$ (d.h. $e^{h(x)}$) auf einer Seite der Gleichung zu isolieren.

Beispiel 2: $4e^{2x} - e^{5x} = 0$

$4e^{2x} - e^{5x} = 0 \quad | +e^{5x}$
$4e^{2x} = e^{5x} \quad | :e^{2x}$ ($e^a/e^b = e^{a-b}$, womit $e^{5x}/e^{2x} = e^{3x}$)
$4 = e^{3x} \quad | \ln(\,)$
$\ln(4) = 3x \quad | :3$

$x = \ln(4)/3$

Bemerkung:
Im Beispiel 2 könnte man auch ausklammern:

$4e^{2x} - e^{5x} = 0$
$e^{2x} \cdot (4 \cdot \frac{e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{e^{5x}}{e^{2x}}) = 0$
$e^{2x} \cdot (4 - e^{3x}) = 0$

Also ist $e^{2x} = 0$ oder $4 - e^{3x} = 0$.

$e^{2x} = 0$ hat keine Lösung!

$4 - e^{3x} = 0 \quad |+ e^{3x}$
$4 = e^{3x} \quad |\ln(\,)$
$\ln(4) = 3x \quad |:3$

$x = \ln(4)/3$

Beispiel 3: $(2x - 5)\, e^{-4x} = 0$

$(2x - 5)\, e^{-4x} = 0$
$2x - 5 = 0$ oder $e^{-4x} = 0$

e^{-4x} hat keine Nullstelle.

$2x - 5 = 0 \quad |+5$
$2x = 5 \quad |:2$
$x = 2{,}5$

Beispiel 4: $e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$

$e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$

Dies ist ein Fall für eine Substitution:
Da $(e^x)^2 = e^{2x}$ gilt (denn $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$), können wir

$z = e^x \qquad (*)$

substituieren, womit $e^{2x} = z^2$ ist.
Damit erhalten wir:

$z^2 - 5z + 4 = 0$

Hier können wir einfach die p – q – Formel anwenden:

$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}$
$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$

$z_1 = 4$
$z_2 = 1$

Nun muss zurücksubstituiert werden. Dazu setzen wir in die Gleichung (*), die wir beim Substituieren verwendet haben, für z die Werte z_1 und z_2 ein oder wir könnten auch direkt die Zurücksubstitution mit $x = \ln(z)$ durchführen.

$z = e^x$

$4 = e^x \quad |\ln(\ )$

$\Rightarrow x_1 = \ln(4)$

Aus $1 = e^x$ ergibt sich dann $x_2 = \ln(1) = 0$.

Wir haben als zwei Lösungen für x gefunden: $x_1 = \ln(4)$ und $x_2 = 0$

Bemerkungen:

1) Allgemein gilt $z = e^x \Leftrightarrow x = \ln(z)$ für positive z. Damit können über $x_{1/2} = \ln(z_{1/2})$ die beiden Lösungen für x (d.h. x_1 und x_2) direkt mit z_1 und z_2 bestimmt werden, wenn die Werte für z beide positiv sind. Sind beide nicht positiv (also negativ oder gleich 0), so gibt es keine Lösung für die Originalgleichung bezüglich x. Dies ist beispielsweise bei $z_1 = 0$ und $z_2 = -4$ (was sich bei der Gleichung $e^{2x} + 4e^x = 0$ ergeben würde) der Fall oder bei $z_1 = -1$ und $z_2 = -3$ (was sich mit der Gleichung $e^{2x} + 4e^x + 3 = 0$ ergeben würde). Wenn nur genau ein Wert für z positiv wäre, gäbe es bei der Originalgleichung nur eine Lösung, was beispielsweise bei der Gleichung $e^{2x} – 5e^x – 24 = 0$ der Fall wär, wo sich $z_1 = 8$ und $z_2 = -3$ ergibt. Hier wäre dann nur $x = \ln(8)$ eine Lösung. Theoretisch kann natürlich auch $z_1 = z_2$ gelten, womit $x_1 = x_2$ wäre oder die Gleichung $z^2 + p\cdot z + q = 0$ könnte auch keine reelle Lösung haben, womit wir dann auch keine Lösung für x, also für die Originalgleichung, erhalten.

2) Substituiert könnte man auch im Fall

$e^{4x} – 5e^{2x} + 4 = 0$ (hier $z = e^{2x}$, womit $z^2 = e^{4x}$ ist)

oder bei

$e^{6x} – 5e^{3x} + 4 = 0$ (hier $z = e^{3x}$, womit $z^2 = e^{6x}$ ist).

Dies geht allgemein bei Gleichungen des Typs $e^{2a\cdot x} + p\cdot e^{a\cdot x} + q = 0$ mit $a \neq 0$.

3) Die Gleichung aus Bespiel 4 hätte auch so aussehen können:
$e^x + 4e^{-x} – 5 = 0$

Multipliziert man hier mit e^x (wegen $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$), so ergibt sich:
$e^{2x} + 4 – 5e^x = 0$

Beispiel 4: $\frac{e^{-2x} - 4}{e^{3x} + 5} = 0$

$$\frac{e^{-2x} - 4}{e^{3x} + 5} = 0$$

Hier müsste man erst den Definitionsbereich festlegen und die Nullstellen es Nenners ausschließen. $e^{3x} + 5 = 0$ hat aber keine Lösung, womit der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ wäre und jede reelle Zahl als Lösung der oberen Gleichung zulässig wäre.

$e^{-2x} - 4 = 0$ | +4
$e^{-2x} = 4$ | ln( )
$-2x = \ln(4)$ | :(-2)
$x = -\ln(4)/2$

Bemerkung:

Es gibt auch Exponentialgleichungen, die nicht durch einfaches Umformen gelöst werden können, wie beispielsweise die Gleichung $x \cdot e^{2x} – 10 + e^{3x} = 0$ oder die Gleichung $e^x = 2x + 3$. Hier müsste ein nummerischen Verfahren (z.B. das Newton-Verfahren) verwendet werden. Einige Taschenrechner stellen hier auch entsprechende Lösungstasten zur Verfügung.

Aufgaben:

1) a) $-5e^{-3x} + 12 = 0$ b) $8e^{2x} + 20 = 0$ c) $4e^{5x} - 10e^{8x} = 0$

d) $-1/3 \cdot e^{5x} + 15e^{x} = 0$ e) $5e^{-2x} + 10e^{4x} = 0$ f) $(x - 5) \cdot e^{-2x} = 0$

g) $2(x^2 - 2{,}25)e^{4x} = 0$ h) $4x \cdot e^{3x} - e^{3x} = 0$

2) a) $e^{2x} - 12e^{x} + 32 = 0$ b) $2e^{4x} + 4e^{2x} - 48 = 0$ c) $e^{6x} + 5e^{3x} + 6 = 0$

Lösungen:

1) a)
$$\begin{aligned} -5e^{-3x} + 12 &= 0 && \mid -12 \\ -5e^{-3x} &= -12 && \mid :(-5) \\ e^{-3x} &= 2{,}4 && \mid \ln(\ ) \\ -3x &= \ln(2{,}4) && \mid :(-3) \\ x &= -\ln(2{,}4)/3 \approx -0{,}292 \end{aligned}$$

b) Bei der Gleichung $8e^{2x} + 20 = 0$ sehen wir, dass diese keine reelle Lösungen hat, da $8e^{2x} > 0$ und $20 > 0$ ist und die Summe zweier positiver Zahlen nicht 0 ergeben kann. Beim Umstellen fällt es auch auf, denn es würde sich $e^{2x} = -2{,}5$ ergeben und ln kann nur auf positive Werte angewendet werden.

c)
$$\begin{aligned} 4e^{5x} - 10e^{8x} &= 0 && \mid +10e^{8x} \\ 4e^{5x} &= 10e^{8x} && \mid :10 \quad \text{(oder alternativ :4, wobei danach dann :}e^{8x}\text{ folgt)} \\ 0{,}4e^{5x} &= e^{8x} && \mid :e^{5x} \\ 0{,}4 &= e^{3x} && \mid \ln(\ ) \\ \ln(0{,}4) &= 3x && \mid :3 \\ x &= \ln(0{,}4)/3 \approx -0{,}305 \end{aligned}$$

d) $-1/3 \cdot e^{5x} + 15e^{x} = 0 \Leftrightarrow -1/3 \cdot e^{5x} = -15e^{x} \Leftrightarrow e^{5x} = 45e^{x} \Leftrightarrow e^{4x} = 45 \Leftrightarrow 4x = \ln(45) \Leftrightarrow x = \ln(45)/4$
$\approx 0{,}952$

e) $5e^{-2x} + 10e^{4x} = 0 \Leftrightarrow e^{-6x} = -2$, keine Lösung.

f) $(x - 5) \cdot e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

g) $2(x^2 - 2{,}25)e^{4x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2{,}25 = 0$ ergibt $x_1 = 1{,}5$ und $x_2 = -1{,}5$ (bzw. $x = 1{,}5$ oder $x = -1{,}5$).

h) $4x \cdot e^{3x} - e^{3x} = 0 \Leftrightarrow (4x - 1)e^{3x} = 0 \Leftrightarrow 4x - 1 = 0$, also $x = 1/4$.

2) a) Substitution von $z = e^{x}$ ($\Rightarrow z^2 = e^{2x}$) in $e^{2x} - 12e^{x} + 32 = 0$ ergibt $z^2 - 12z + 32 = 0$. Die p-q-Formel liefert $z_1 = 8$ und $z_2 = 4$. Rücksubstitution ($x = \ln(z)$, da $z = e^{x}$): $x_1 = \ln(8) \approx 2{,}079$ und $x_2 = \ln(4) \approx 1{,}386$.

b) Substitution von $z = e^{2x}$ ($\Rightarrow z^2 = e^{4x}$) in $2e^{4x} + 4e^{2x} - 48 = 0$ ergibt $2z^2 + 4z - 48 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z - 24 = 0$. Die p-q-Formel liefert $z_1 = 4$ und $z_2 = -6$. Rücksubstitution: $4 = e^{2x}$ ergibt $x = \ln(4)/2 \approx 0{,}693$. Es existiert keine zweite Lösung ($-6 = e^{2x}$ hat keine reelle Lösung).

c) Substitution von $z = e^{3x}$ ($\Rightarrow z^2 = e^{6x}$) in $e^{6x} + 5e^{3x} + 6 = 0$ ergibt $z^2 + 5z + 6 = 0$. Die p-q-Formel liefert $z_1 = -2$ und $z_2 = -3$. Es gibt keine Lösung: $-2 = e^{3x}$ und $-3 = e^{3x}$ haben jeweils keine reelle Lösung.
Allgemein ist für die Substitution $z = e^{a \cdot x}$ die Rücksubstitution durch $x = \ln(z)/a$ für $a \neq 0$ gegeben.