# Extrempunkte berechnen

Gesucht sind die Lage und Arten der Extrempunkt folgender Funktionen:

1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$

3) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 22$

4) $f(x) = x^3 - 12a^2x;\ a > 0$

**Lösung:**

1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$
$f''(x) = 6x - 18$

Notwendige Bedingung:

$f'(x) = 0$
$3x^2 - 18x + 24 = 0 \mid :3$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-8}$
$= 3 \pm 1$
$x_1 = 4;\ x_2 = 2$

Liegt ein Hochpunkt (HP), Tiefpunkt (TP) oder ein Sattelpunkt (SP) vor?

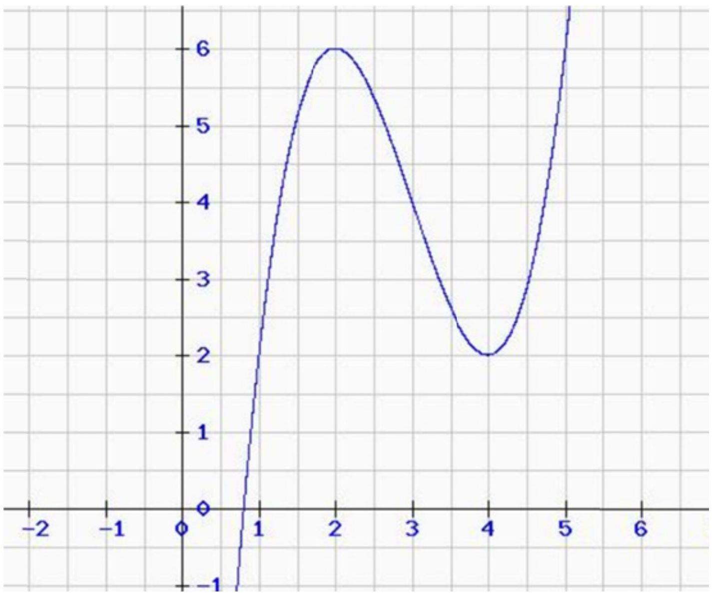
In f''(x) einsetzen (hinreichende Bedingung):

$f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0$ (TP)
$f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0$ (HP)

Funktionswerte (y –Werte) berechnen:

$f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 14 = 2$
$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 14 = 6$

Also: $E_1(4;\ 2)$ ist TP und $E_2(2;\ 6)$ ist HP.




2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$
$f'(x) = 2x^3 - 8x$
$f''(x) = 6x^2 - 8$

Notwendige Bedingungen:

$f'(x) = 0$
$2x^3 - 8x = 0 \mid :2$
$x^3 - 4x = 0$
$x \cdot (x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$
$x^2 - 4 = 0 \mid +4$
$x^2 = 4 \mid \sqrt{\phantom{x}}$

$x_{2/3} = \pm 2$

Die Extrempunkte liegen spiegelsymmetrisch zur y-Achse, da f zu dieser symmetrisch ist (nur gerade Exponenten). In f''(x) einsetzen:

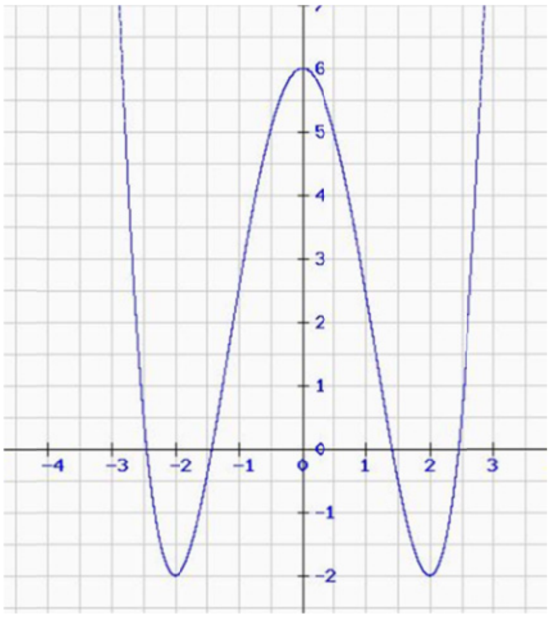
$f''(0) = 6 \cdot 0^2 - 8 = -8 < 0$ (HP)
$f''(2) = 6 \cdot 2^2 - 8 = 16 > 0$ (TP)

Bei $x_3 = -2$ muss wegen der Symmetrie zur y-Achse ebenfalls ein TP vorliegen.

Funktionswerte berechnen:

$f(0) = 6 \Rightarrow E_1(0; 6)$ ist HP
$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 6 = -2$

Damit ist $E_2(2; -2)$ ein TP und $E_3(-2; -2)$ ist auch ein TP (wegen der Symmetrie zur y–Achse).




3) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 22$
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 27$
$f''(x) = 6x - 18$
$f'''(x) = 6$

Notwendige Bedingungen:

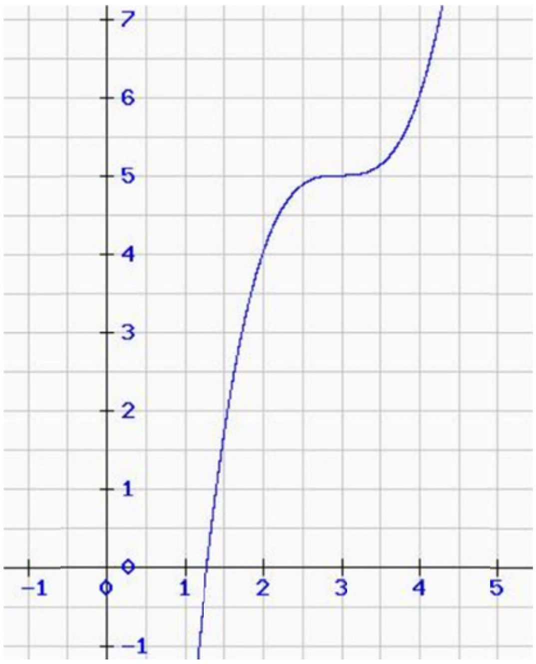
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 27 = 0 \quad | :3$
$x^2 - 6 + 9 = 0$
$x_{1/2} = 3 \pm\sqrt{9-9}$
$= 3$

Dies ist ein Hinweis auf einen SP, da die erste Ableitung eine doppelte Nullstelle hat.

In f''(x) einsetzen:

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 18 = 0$
Jetzt muss man in f'''(x) einsetzen:

$f'''(x) = 6 \neq 0$




Da $f''(3) = 0$ und $f'''(3) \neq 0$ ist, liegt an der Stelle $x = 3$ ein WP vor. Da auch $f'(3) = 0$ ist (wir hatten oben $f'(x) = 0$ nach x aufgelöst und $x = 3$ als Lösung erhalten), handelt es sich nun um einen SP (Sattelpunkt = Wendepunkt mit waagerechter Tangente).

Funktionswerte berechnen:

$f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 27 \cdot 3 - 22 = 5$, womit der SP bestimmt wurde: S(3; 5)

4) $f(x) = x^3 - 12a^2x$ mit $a > 0$.
$f'(x) = 3x^2 - 12a^2$
$f''(x) = 6x$

Notwendige Bedingungen:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12a^2 = 0 \quad | + 12a^2$
$3x^2 = 12a^2 \quad |:3$
$x^2 = 4a^2 \quad |\sqrt{\phantom{x}}$
$x_{1/2} = \pm 2a$

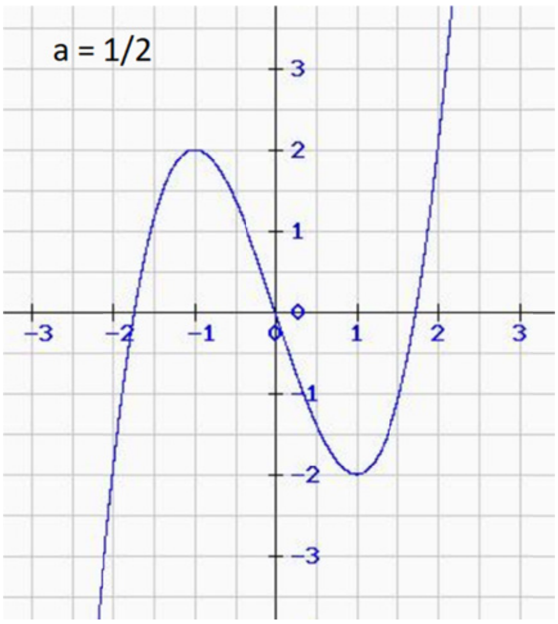
In $f''(x)$ einsetzen:

$f''(2a) = 6 \cdot 2a = 12a > 0$, da $a > 0$ gilt. Es liegt ein TP vor.
$f''(-2a) = 6 \cdot (-2a) = -12a < 0$, da $a > 0$ gilt. Es liegt ein HP vor.

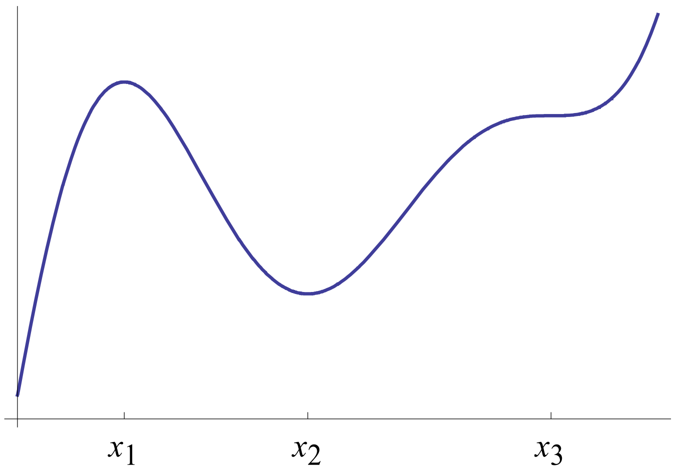
In $f(x)$ einsetzen:

$f(2a) = (2a)^3 - 12a^2 \cdot 2a$
$= 8a^3 - 24a^3 = -16a^3$
$f(-2a) = (-2a)^3 - 12a^2 \cdot (-2a) = 16a^3$ (klar, wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung)

Also gilt:
$E_1(2a; -16a^3)$ ist TP.
$E_2(-2a; 16a^3)$ ist HP.



**Abschließend werden nochmals die Bedingungen für einen HP, TP und einen SP dargestellt:**
Die Skizze zeigt eine Funktion mit HP bei $x_1$, TP bei $x_2$ und Sattelpunkt bei $x_3$.




Zu dem obigen Graph eines Polynoms 5. Grades passen folgende Bedingungen:

$f'(x_1) = 0$
$f''(x_1) < 0$ (da hier ein HP vorliegt)

$f'(x_2) = 0$
$f''(x_2) > 0$ (da hier ein TP vorliegt)

$f'(x_3) = 0$
$f''(x_3) = 0$ und $f'''(x_3) \neq 0$, denn bei $x = x_3$ liegt ein SP vor.

**Bemerkung:**
Wenn der Grad des oben dargestellten Polynoms größer als 5 ist, könnte theoretisch für den HP an der Stelle $x = x_1$ auch gelten: $f'(x_1) = 0$, $f''(x_1) = 0$, $f'''(x_1) = 0$ und $f^{(4)}(x_1) < 0$. Hätte die Funktion nur einen Extrempunkt, würde auch der Grad 4 genügen, um so einen „Spezialfall" vorzufinden (z.B. bei $f(x) = -x^4$). Bei einem Extrempunkt muss die erste von Null verschiedene Ableitung einen geraden Grad haben, beispielsweise - wie hier dargestellt - die Ableitung 4. Grades (oder allgemein auch die 6., 8., 10., … Grades).

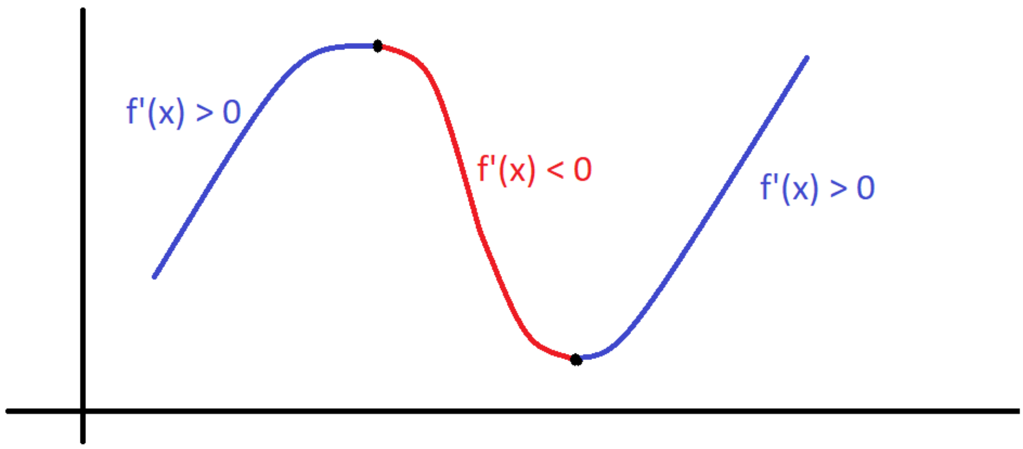
Analog kann für den TP an der Stelle $x = x_2$ gelten: $f'(x_2) = 0$, $f''(x_2) = 0$, $f'''(x_2) = 0$ und $f^{(4)}(x_2) > 0$

Für den SP an der Stelle $x = x_3$ kann auch $f'(x_3) = 0$, $f''(x_3) = 0$, $f'''(x_3) = 0$, $f^{(4)}(x_3) = 0$ und $f^{(5)}(x_3) \neq 0$ gelten.

Bei einem SP muss die erste von Null verschiedene Ableitung einen ungeraden Grad haben, wie beispielsweise hier dargestellt die Ableitung 5. Grades (oder allgemein auch die 7., 9., 11., … Grades).

Das sind „Spezialfälle", die in der Schule selten eine Rolle spielen, wobei diese schon bei einfachen Potenzfunktionen ab Grad 4 auftreten, wie bei $g(x) = x^4$ (TP im Ursprung) oder bei $h(x) = x^5$ (SP im Ursprung).

Am Vorzeichen der ersten Ableitung erkennen wir, wo eine Funktion streng monoton steigend verläuft (f'(x) > 0) und wo streng monoton fallend (f'(x) < 0). Da, wo sich das Monotonieverhalten ändert, befinden sich die Extremstellen und hier sind die ersten Ableitungen gleich Null.-




Am Vorzeichen der zweiten Ableitung erkennen wir das Krümmungsverhalten, d.h. ob der Graph eine Linkskrümmung hat (f''(x) > 0) oder eine Rechtskrümmung (f''(x) < 0). Wo sich das Krümmungsverhalten ändert (von einer Links- in eine Rechtskrümmung oder umgekehrt), befinden sich die Wendestellen und hier sind die zweiten Ableitungen gleich Null.