Extrempunkte und Wendepunkte bestimmen

1) Gesucht werden die Art und die Lage der Extrema von :

a) $f(x) = -x^2 + 6x + 4$
b) $f(x) = -1/3 \cdot x^3 + 9x + 5$
c) $f(x) = 1/2 \cdot x^4 - 4x^2 + 3$
d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2$
e) $f(x) = 1/3 \cdot x^3 - 2a \cdot x^2 - 4$; $a > 0$
f) $f(x) = 1/x + x$ (Dies ist kein Polynom.)

2) Gesucht werden die Art und die Lage der Wendepunkte von:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2$
b) $f(x) = 1/6 \cdot x^4 - 1/3 \cdot x^3 - 2x^2 + 2$
c) $f(x) = -x^3 + a \cdot x^2 + 2a^3$; $a \neq 0$

Lösungen:

1)

a)

$f(x) = - x^2 + 6x + 4$

$f'(x) = -2x + 6$

$f''(x) = -2$

$f'(x) = 0$ (notwendige Bedingung für Extrema)

$-2x + 6 = 0 \quad | -6$

$-2x = -6 \quad | :(-2)$

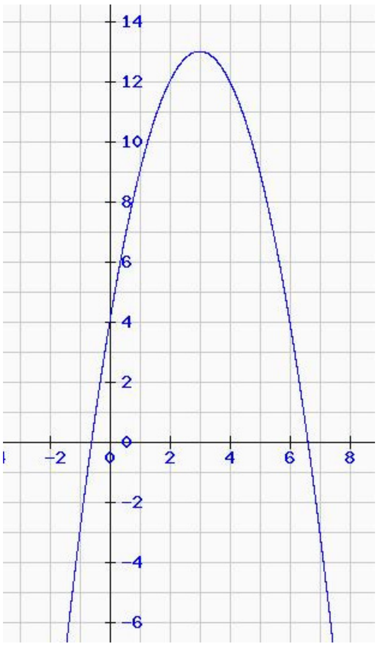
$x = 3$

In $f''(x)$ einsetzen:

$f''(3) = -2 < 0 \Rightarrow$ HP

In $f(x)$ einsetzen:

$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 4 = 13$ E(3; 13) (HP)



b)

$f(x) = -1/3x^3 + 9x + 5$

$f'(x) = -x^2 + 9$

$f''(x) = -2x$

$f''(x) = 0$

$-x^2 + 9 = 0 \quad | -9$

$-x^2 = -9 \quad | :(-1)$

Also: $x_{1/2} = \pm 3$

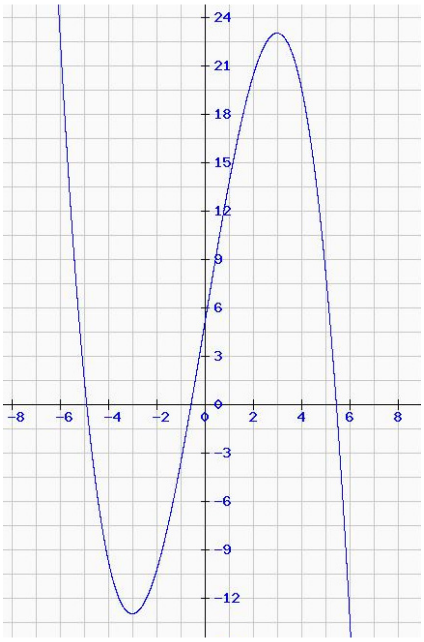
In f''(x) einsetzen:

$$f''(3) = -2 \cdot 3 < 0 \Rightarrow HP$$
$$f''(-3) = -2 \cdot (-3) = 6 > 0 \Rightarrow TP$$

In f(x) einsetzen:

$$f(3) = -1/3 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3 + 5 = 23$$
$$f(-3) = -1/3 \cdot (-3)^3 + 9 \cdot (-3) + 5 = -13$$

E_1 (3; 23) (HP)
E_2 (-3; -13) (TP)



c)

$f(x) = 1/2 \cdot x^4 - 4x^2 + 3$
$f'(x) = 2x^3 - 8x$
$f''(x) = 6x^2 - 8$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad 2x^3 - 8x = 0 \qquad | :2$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x \cdot (x^2 - 4) = 0 \qquad \text{(somit ist } x_1 = 0)$$

$$x^2 - 4 = 0$$

Also: $x_{2/3} = \pm 2$

In f''(x) einsetzen:

$$f''(0) = 0 - 8 < 0 \Rightarrow HP$$
$$f''(2) = 6 \cdot 2^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow TP$$
$$f''(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow TP$$

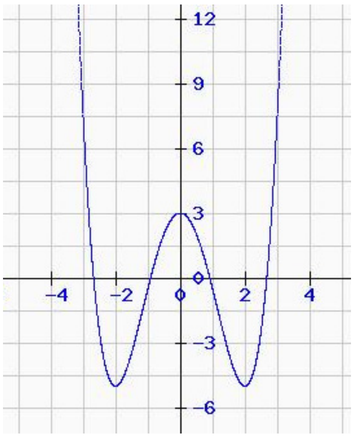
In f(x) einsetzen:

$f(0) = 3$

$f(2) = -5$

$f(-2) = -5$

Damit ergaben sich die Extrempunkte E_1 (0; 3) (HP), E_2 (2; -5) (TP) und E_3 (-2; -5) (TP).



d)

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-4}$

$= 2$

Doppelte Nullstelle von f‘ ist ein Hinweis auf einen Sattelpunkt.

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 12 = 0$

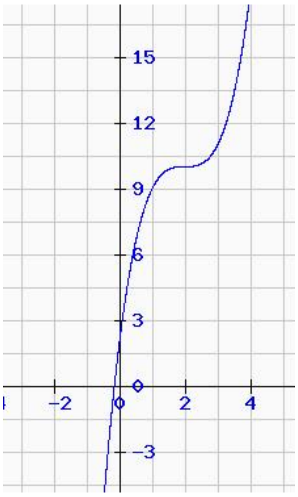
Wir müssen in f‘‘‘(x) einsetzen, um zu prüfen, ob ein Sattelpunkt vorliegt, da ein Sattelunkt ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente ist (f‘(2) = 0 ⇒ waagrechte Tangente, mit f‘‘(2) = 0 und f‘‘‘(2) ≠ 0 liegt dann auch ein Wendepunkt vor und somit, wegen der waagrechten Tangente, ein Sattelpunkt).

Es gilt $f'''(x) = 6$ und damit $f'''(2) = 6 \neq 0$.

⇒ Sattelpunkt = Wendepunkt mit waagerechter Tangente

Funktionswert berechnen: $f(2) = 10$

S(2; 10) ist Sattelpunkt.



e)

f(x) = 1/3·x³ - 2ax² - 4

f'(x) = x² - 4ax

f''(x) = 2x – 4a

f'(x) = 0 ⟺ x² - 4ax = 0

x · (x – 4a) = 0

Also: $x_1 = 0$, $x_2 = 4a$.

In f''(x) einsetzen:

f''(0) = - 4a < 0 (da a > 0) ⇒ HP

f''(4a) = 2 · 4a – 4a = 4a > 0 (da a > 0) ⇒ TP

In f(x) einsetzen:

f(0) = -4 ⇒ E_1 (0; -4) (HP)

f(4a) = 1/3 · (4a)³ - 2a · (4a)² - 4

= 1/3 · 64a³ - 2a · 16a² - 4

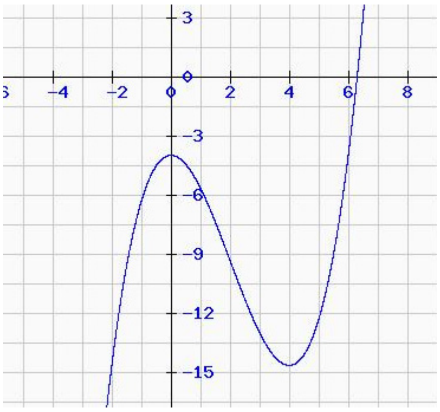
= 64/3·a³ - 32a³ - 4

= -32/3·a³ - 4

⇒E_2 (4a; -32/3·a³ - 4) (TP)

Bemerkung zur Schreibweise: Eigentlich würde -32/3a³ statt -32/3·a³ genügen, da aber schon in Schulbücher 1/2a stand, aber falsch 1/(2a) bzw. $\frac{1}{2a}$ gemeint war, wurde hier noch mal teils mit einem Malpunkt verdeutlicht, dass mit -32/3a³ der Term -32/3·a³ gemeint ist, nicht - $\frac{132}{3a^3}$.

Es folgt der Graph für a = 1:



f)

$f(x) = 1/x + x = x^{-1} + x$ (Dies ist kein Polynom, sondern eine gebrochenrationale Funktion.)

$f'(x) = -x^{-2} + 1$ $(= -1/x^2 + 1)$

$f''(x) = 2x^{-3}$ $(= 2/x^3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1/x^2 + 1 = 0 \qquad | \cdot x^2$

$-1 + x^2 = 0 \qquad | +1$

$x^2 = 1 \qquad | \sqrt{}$

Also: $x_{1/2} = \pm 1$

In f''(x) einsetzen:

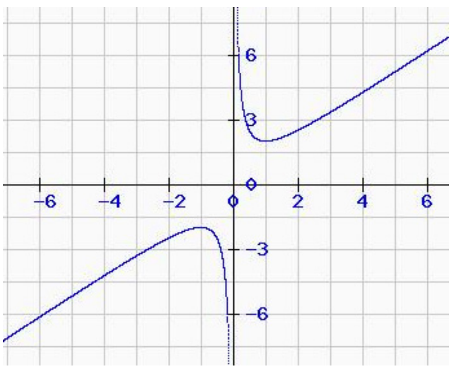
$f''(1) = 2 \cdot 1^{-3} = 2 > 0 \Rightarrow$ TP

$f''(-1) = 2 \cdot (-1)^{-3} = -2 < 0 \Rightarrow$ HP

In f(x) einsetzen:

$f(1) = 1/1 + 1 = 2 \Rightarrow E_1\ (1; 2)$ (TP)

$f(-1) = 1/(-1) + (-1) = -2 \Rightarrow E_2\ (-1; -2)$ (HP)



2) a)

$f(x) = x^3 - 6x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 12x$

$f''(x) = 6x - 12$

$f'''(x) = 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0$

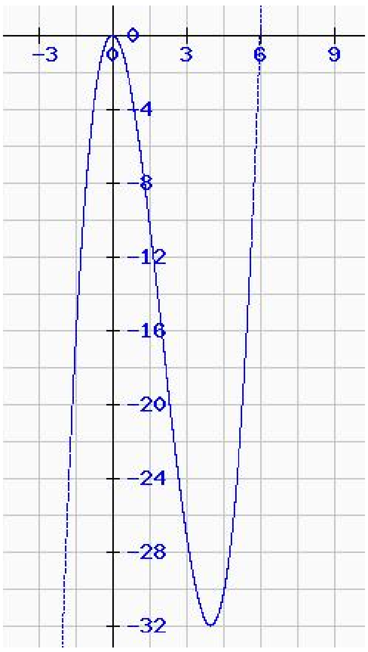
$x = 2$

In $f'''(x)$ einsetzen:

$f'''(2) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ WP

In $f(x)$ einsetzen:

$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 = -16 \Rightarrow W(2; -16)$



b)

$f(x) = 1/6 \cdot x^4 - 1/3 \cdot x^3 - 2x^2 + 2$

$f'(x) = 2/3 \cdot x^3 - x^2 - 4x$

$f''(x) = 2x^2 - 2x - 4$

$f'''(x) = 4x - 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \mid :2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_{1/2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$

$= 1/2 \pm 3/2$

Also: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

In $f'''(x)$ einsetzen:

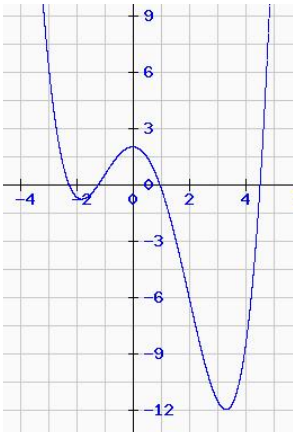
$f'''(2) = 4 \cdot 2 - 2 = 6 \neq 0 \Rightarrow$ WP (da $f'''(2) > 0$ R -L-WP)

$f'''(-1) = 4 \cdot (-1) - 2 = -6 \neq 0 \Rightarrow$ WP (da $f'''(-1) < 0 \Rightarrow$ L-R-WP)

In f(x) einsetzen:

$f(2) = -6 \Rightarrow WP_1\ (2; -6)$

$f(-1) = 1/2 \Rightarrow WP_2\ (-1; 1/2)$



c)

$f(x) = -x^3 + a \cdot x^2 + 2a^3 \quad ; a \neq 0$

$f'(x) = -3x^2 + 2a \cdot x$

$f''(x) = -6x + 2a$

$f'''(x) = -6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 2a = 0 \quad | -2a$

$-6x = -2a \quad | :(-6)$

$x = 1/3 \cdot a$

In $f'''(x)$ einsetzen:

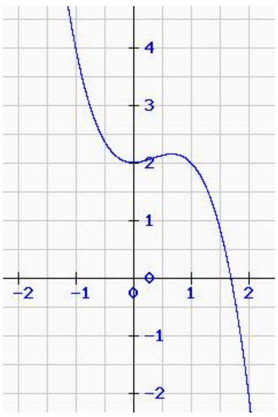
$f'''(1/3 \cdot a) = -6 \neq 0 \Rightarrow$ WP

In f(x) einsetzen:

$f(1/3 \cdot a) = -(1/3 \cdot a)^3 + a \cdot (1/3 \cdot a)^2 + 2a^3$

$= -1/27 \cdot a^3 + 1/9 \cdot a^3 + 2a^3$

$= 56/27 \cdot a^3 \qquad \Rightarrow W(1/3 \cdot a; 56/27 \cdot a^3)$



(Graph für a = 1.)