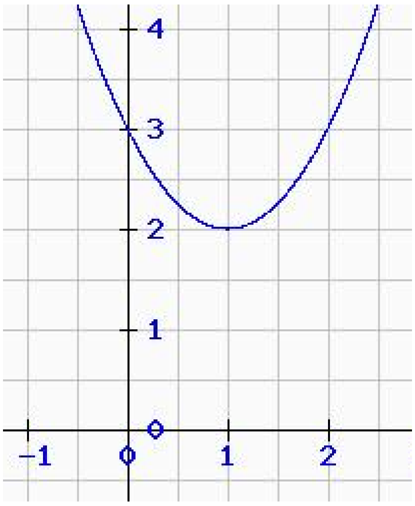
Extrempunkte berechnen

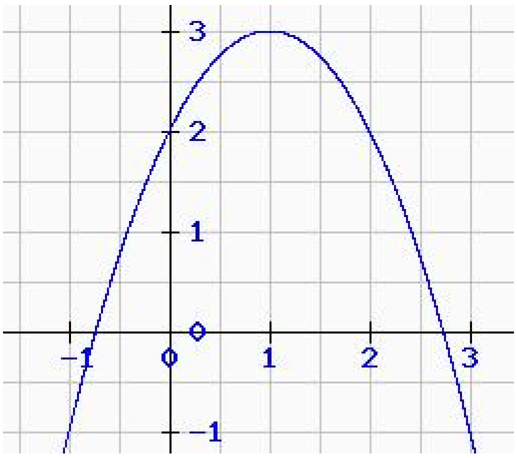
So können in drei Schritten Extrempunkt bestimmt werden:

Schritt 1: Setze $f'(x) = 0$ und löse nach x auf. Wir nehmen an, wir haben eine Stelle $x = x_1$ gefunden.

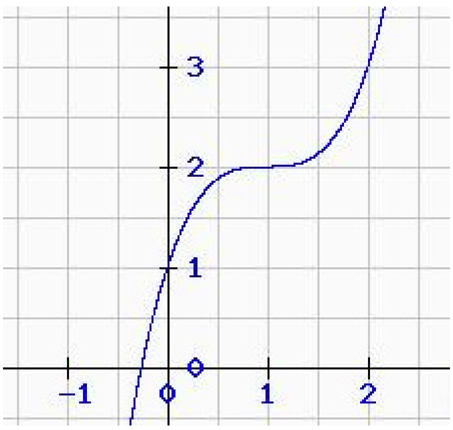
Schritt 2: Setze x_1 in $f''(x)$ einsetzen. Ist $f''(x_1) > 0$, dann liegt an der Stelle $x = x_1$ ein Tiefpunkt (TP) vor, wie hier bei $x = 1$ und der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 3$:



Ist $f''(x_1) < 0$, liegt an der Stelle $x = x_1$ ein Hochpunkt (HP) vor, wie hier bei $x = 1$ und $f(x) = -x^2 + 2x + 2$:



Ist $f''(x_1) = 0$ und $f'''(x_1) \neq 0$, dann liegt an der Stelle $x = x_1$ ein Sattelpunkt vor, wie hier bei $x = 1$ und $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$:



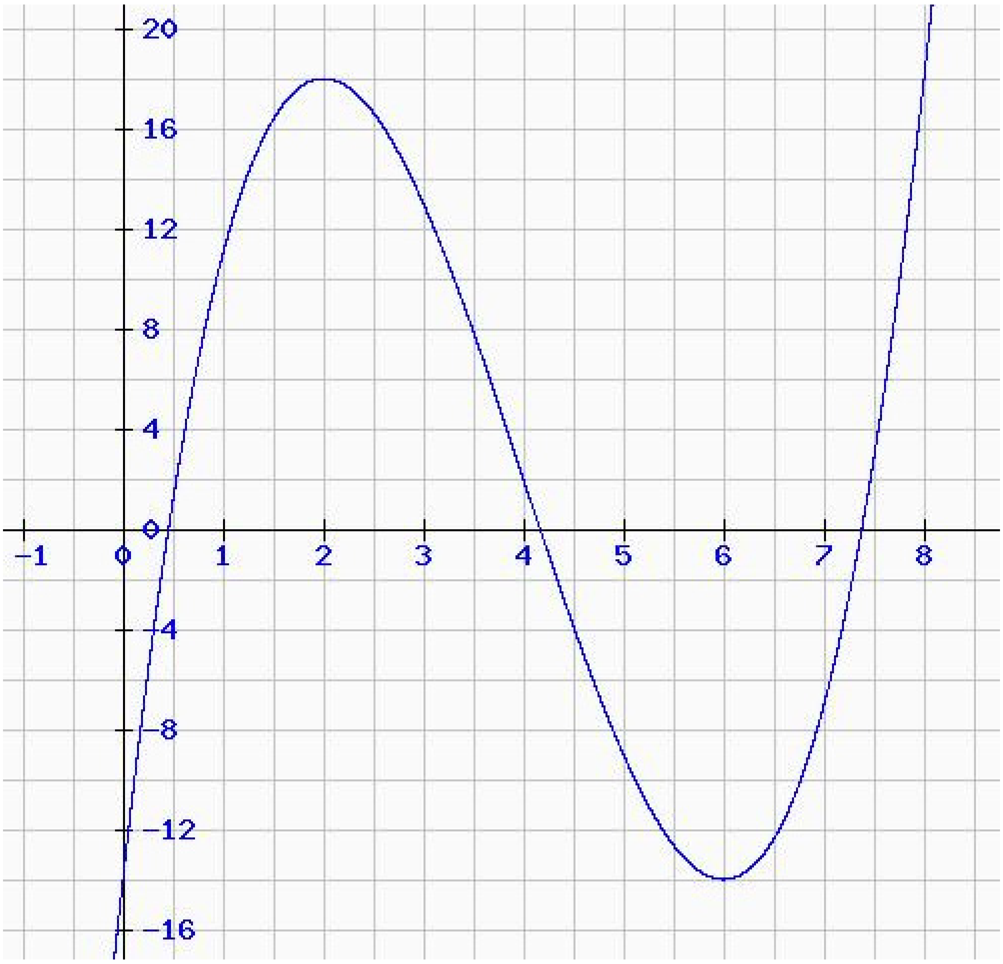
Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

Schritt3: x_1 in f(x) einsetzen, um den y-Wert zu berechnen: $y_1 = f(x_1)$

Beispiel 1:

$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x – 14$
$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$
$f''(x) = 6x – 24$
$f'''(x) = 6$

Graph von $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x – 14$:



$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 0$ |:3
$x^2 - 8x + 12 = 0$

Mit der p-q-Formel ergibt sich:

$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16-12}$
$= 4 \pm 2$

$x_1 = 6$ und $x_2 = 2$

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(6) = 6 \cdot 6 - 24 = 12 > 0 \Rightarrow$ TP
$f''(2) = 6 \cdot 2 - 24 = -12 < 0 \Rightarrow$ HP

In $f(x)$ einsetzen: $y_1 = f(6) = -14 \Rightarrow E_1(6; -14)$ (TP)
$y_2 = f(2) = 18 \Rightarrow E_2(2; 18)$ (HP)

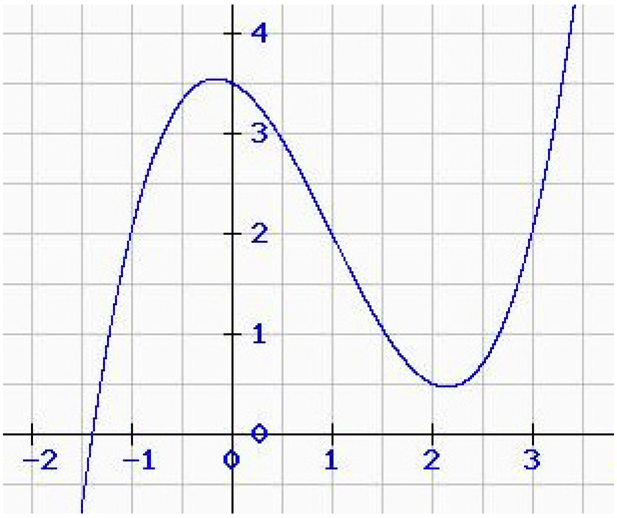
Bemerkung:
$f'(6) = 0$ ist die notwendige Bedingung dafür, dass an der Stelle $x = 6$ ein Extrempunkt vorliegt, es reicht aber noch nicht aus, damit auch sicher ist, dass dort ein Extrempunkt liegt. $f'(6) = 0$ zeigt erst einmal, dass bei $x = 6$ eine waagrechte Tangente vorliegt. Bei Extrempunkten muss eine waagrechte Tangente vorliegen (unter gewissen Voraussetzungen an die Funktion f, die u.a. bei Polynomen erfüllt sind), es liegen aber auch bei Sattelpunkten waagrechte Tangenten vor. Mit der notwendigen Bedingung $f'(6) = 0$ ist mit $f''(6) \neq 0$ auch die hinreichende Bedingung erfüllt und damit gesichert, dass an der Stelle $x = 6$ auch ein Extrempunkt vorliegt.

Statt die zweite Ableitung zu verwenden, könnte auch geprüft werden, ob links von $x = 6$ die Ableitung ein anderes Vorzeichen als rechts von $x = 6$ hat. Ist z.B. $f'(5,9) < 0$ und $f'(6,1) > 0$, dann liegt ein TP bei $x = 6$ vor, da $f'(6) = 0$ war, wie im Beispiel. Vor dem TP muss der Graph fallen und danach muss er steigen. Bei Hochpunkten ist es umgekehrt.

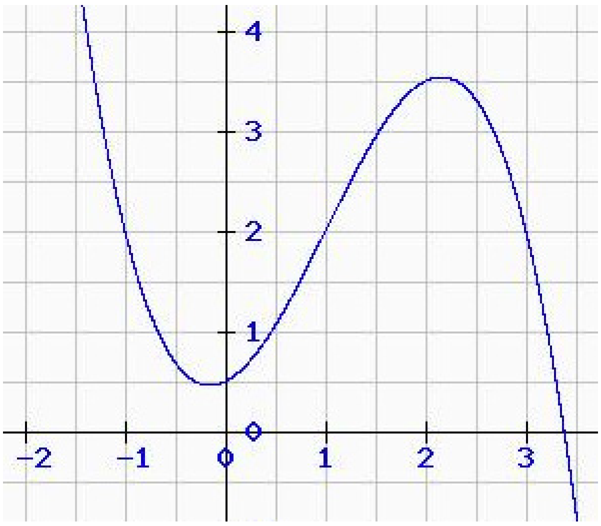
Wendepunkte berechnen

So können Wendepunkt in drei Schritten bestimmt werden:
Schritt 1: Seite $f''(x) = 0$ und löse nach x auf. Wir nehmen an, wir haben eine Stelle $x = x_1$ gefunden.

Schritt 2: Seite x_1 in $f'''(x)$ einsetzen. Ist $f'''(x_1) \neq 0$, dann liegt an der Stelle $x = x_1$ ein Wendepunkt (WP) vor. Es können sogar Aussagen über die Art des Wendepunktes gemacht werden, wenn das Vorzeichen von $f'''(x_1)$ beachtet wird: Gilt $f'''(x_1) > 0$, dann geht die Kurve bei $x = x_1$ von einer Rechts- in eine Linkskurve über, wie hier bei $x = 1$ und $f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - 0{,}5x + 3{,}5$:



Gilt $f'''(x_1) < 0$, dann geht die Kurve bei $x = x_1$ von einer Links- in eine Rechtskurve über, wie hier bei $x = 1$ und $f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 + 0{,}5x + 0{,}5$:



Im Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten, während sich in einem Extrempunkt das Steigungsverhalten ändert.

Schritt3: x_1 in $f(x)$ einsetzen, um den y-Wert zu berechnen: $y_1 = f(x_1)$

Im Beispiel 2:

$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 14$ (gleiche Funktion wie in Beispiel 1)
$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$
$f''(x) = 6x - 24$
$f'''(x) = 6$

$f''(x) = 6x - 24 = 0$

Damit ist $x = 4$.

In $f'''(x)$ einsetzen: $f'''(4) = 6 \neq 0$, also WP bei $x = 4$.

Da $f'''(4) = 6 > 0$ ist, geht der Graph von f bei $x = 4$ von einer Rechtskurve in eine Linkskurve (siehe Graph von f aus Beispiel 1) über.

In f(x) einsetzen: $y = f(4) = 2 \Rightarrow W(4; 2)$ (WP)

Bemerkung:
$f''(4) = 0$ ist die notwendige Bedingung dafür, dass an der Stelle $x = 4$ ein Wendepunkt vorliegt, es reicht aber noch nicht aus, damit auch sicher ist, dass dort ein Wendepunkt liegt. Mit der notwendigen Bedingung $f''(4) = 0$ ist mit $f'''(4) \neq 0$ auch die hinreichende Bedingung erfüllt und damit gesichert, dass an der Stelle $x = 4$ auch eine Wendepunkt vorliegt.

Statt die dritten Ableitung zu verwenden, könnte auch geprüft werden, ob links von $x = 4$ die zweite Ableitung ein anderes Vorzeichen als rechts von $x = 4$ hat. Ist z.B. $f''(3{,}9) < 0$ und $f'(4{,}1) > 0$, dann liegt ein Wendepunkt bei $x = 4$ vor, da $f'(4) = 0$ war, wie im Beispiel. Es könnte allgemein natürlich auch links von der Wendestelle die zweite Ableitung positiv und dann rechts davon negativ sein. Wenn die zweite Ableitung negativ ist, dann ist die Funktion linksgekrümmt und wenn diese positiv ist rechtsgekrümmt. Deshalb ist im Beispiel oben $f''(3{,}9) < 0$ und $f'(4{,}1) > 0$, da der Graph von f bei $x = 4$ von einer Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht.

Deshalb ist in einem HP auch die zweite Ableitung negativ, da die Kurve im HP nach rechts gekrümmt sein muss.

,