Aufgaben zur Vektorrechnung

1) Liegt der Punkt P(1; -1; 2) auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ?$$

2) a) Wie groß ist der Abstand der Punkte A(4; 2; -4) und B(1;-2;-4) zueinander?
   b) Gesucht wir der Mittelpunkt zwischen A und B aus a).

3) Sind die Vektoren

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

orthogonal zueinander? Wenn sie nicht orthogonal sind, wie groß ist der Winkel, den sie beide einschließen?

4) a) Liegt der Punkt P(2; 4; 3) auf der Ebene mit der Gleichung E: 2x – 4y + z = 3?
   b) Wie muss a gewählt werden, damit der Punkt P(4; a; -2) auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

liegt?

5) Gegeben sind die Punkt A(4; -5; 7), B(6; -9; 9) und C(-1; 0; 2), die in der Ebene E liegen.
a) Wie lautet eine Gleichung der Ebene E in Parameterform?
b) Wie lautet eine Gleichung der Ebene E in Normal- und Koordinatenform?
c) Wo schneidet die Ebene E die x-Achse?
d) Wo schneidet die Gerade g aus Aufgabe 1 die Ebene E und wie groß ist der Schnittwinkel?

6) Wie groß ist der Abstand des Punktes P(2; -1; 8) von der Ebene E: 6x – 3y + 3z = 10?

7) Wie ist die Lage der Gerade g durch die Punkte A(4; 2; -1) und C(5; 3; 1) zur Geraden h durch die Punkte C(2; 0; -5) und D(6; 4; 3)?

8) Im Punkt P(40; 10; 0) befindet sich die unterste Stelle eines 12m hohen Mastes. Die Sonne scheint Richtung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wo trifft der Schatten der Spitze des Masts den Boden (der durch die Gleichung E: z = 0 beschrieben wird)?

Lösungen:

1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wenn der Punkt P auf der Geraden g liegt, muss sich für jede Komponente das gleiche t ergeben:

(1) 1 = 4 – t ⇔ -3 = -t

(2) -1 = -5 + 2t ⇔ 4 = 2t

(3) 2 = 6 – 2t

(1) liefert t = 3 und (2) liefert t = 2. Damit braucht man (3) gar nicht mehr zu lösen. P liegt nicht auf g. Es hätte sich 3-mal derselbe Wert für t ergeben müssen, damit P auf g gelegen hätte.

2) a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{0\mathrm{B}} - \overrightarrow{0\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

d = $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2}$ = 5

(oder d = $\sqrt{(\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1)^2 + (\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2)^2 + (\mathrm{b}_3 - \mathrm{a}_3)^2}$)

b) $\overrightarrow{0\mathrm{M}}$ = ½ $(\overrightarrow{0\mathrm{A}} + \overrightarrow{0\mathrm{B}})$ = ½ ($\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$) = $\begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{M}\ (5/2\ ;\ 0\ ;\ -4)$

3) a) $\vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 - 4 + 6 = 0 \ \Rightarrow \mathit{orthogonal}$

b) $\vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 - 15 - 2 = -15 \ \neq 0 \ \Rightarrow \mathit{nicht\ orthogonal}$

Für die Winkelberechnung benötigen wir die Längen bzw. Beträge der einzelnen Vektoren:

$|\vec{\mathrm{a}}| = \sqrt{4 + 25 + 1} = \sqrt{30} \quad \left|\vec{\mathrm{b}}\right| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-15}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{14}} \quad | \cos^{-1}()$

α ≈ 137,05°

4) a) P(2; 4; 3) in E: 2x – 4y + z = 3 einsetzen:

$2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3$

$4 - 16 + 3 = 3$

-9 = 3, also Widerspruch und damit liegt P nicht in E

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

(1) 4 = 2 – 2t
(2) a = - 5 + 3t
(3) -2 = 6 + 8t

(1) ergibt t = -1.
In (2): a = - 5 + 3 · (- 1) = - 8
Probe mit (3), damit P auch auf g liegt:
-2 = 6 + 8 · (- 1)
-2 = - 2, stimmt, also liegt für a = -8 der Punkt auf g.

5) a) E: $\vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$ mit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}$ und $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0A}$.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 -4 \\ -9+5 \\ 9 -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1-4 \\ 0 +5 \\ 2 -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot (-5) - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-5) - 2 \cdot (-5) \\ 2 \cdot 5 - (-4) \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

Man kann auch $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ verwenden, die Länge von $\vec{n}$ egal ist (solang sie natürlich nicht 0 ist).

Normalform: E: $[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ ist dabei der Stützvektor aus der Pammelerform.

Wir wandeln in Koordinatenform um:

$[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

x – z – (4 + 0 – 7) = 0

x – z + 3 = 0

⇒ E: x – z = - 3 ist eine Darstellung in Koordinatenform.

c) E: x – z = - 3

x-Achse: P(x; 0; 0) liegen auf x-Achse. Also y = 0 und z = 0 in E einsetzen.:

x – 0 = - 3
x= -3 ⇒ S_x(-3; 0; 0)

d) Gerade aus 1):

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gerade hat damit die Koordianten:
x = 4 – t
y = - 5 + 2t
z = 6 – 2t

In E einsetzen und nach t auflösen:
x – z = - 3
4 – t – (6 – 2t) = - 3
4 – t – 6 + 2t = - 3
-2 + t = - 3
t = - 1

In g einsetzen:

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$ ⇒ Schnittpunkt ist P(5; -7; 8)

Zur Berechnung des Schnittpunktes war es am einfachsten, die Koordinatenform von E zu verwenden. Bei der Parametaform von E hätte man die Gleichungen gleichsetzen müssen und ein System mit 3 Unbekannten lösen müssen.

Schnittwinkel: $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}$

Bei der Schnittwinkelberechnung zwischen Gerade und Ebene muss der Normalenvektor der Ebene $\vec{n}$ und der Richtungsvektor der Geraden $\vec{v}$ verwendet werden. Im Zähler steht der Betrag des Skalarproduktes, damit der Schnittwinkel nicht über 90° ausgegeben wird und nur beim Schnittwinkel zwischen Ebene und Gerade steht ausnahmsweise der Sinus in der Formel, während sonst bei den anderen Schnittwinkel (Gerade/Gerade und Ebene/Ebene) immer, wie üblich, der Cosinus verwendet wird.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ⇒ = $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow = |\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$

$\vec{n} \cdot \vec{v} = -1 + 0 + 2 = 1$

$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3}\right) \approx 13.63°$

6) 6x – 3y + 3z = 10

Wir müssen die Hesse-Normalform (HNF) bestimmen (als Koordinatendarstellung, da diese schon vorliegt). Wenn E: $n_1x + n_2y + n_3z = c$ die Ebenengleichung ist, wäre dann

d = $\left|\frac{n_1x + n_2y + n_3z - c}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}\right|$ der Abstand, eines Punktes P(x; y; z) von E.

Wir berechnen diese Schritt für Schritt. Dazu müssen wir die Gleichung durch die Länge des Normalenvektors dividieren und zur auf die Form … = 0 bringen.

6x – 3y + 3z = 10 |-10
6x – 3y + 3z – 10 = 0

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow = |\vec{n}| = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54}$

$\frac{6x - 3y + 3z - 10}{\sqrt{54}} = 0$ ist HNF als Koordinatengleichung.

Abstand von P(x; y; z) zu E: d = $\left|\frac{6x - 3y + 3z - 10}{\sqrt{52}}\right|$

P(2; -1; 8) einsetzen:

Abstand: d = $\left|\frac{6 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 8 - 10}{\sqrt{54}}\right| = \left|\frac{29}{\sqrt{54}}\right| \approx 3{,}95$ (LE)

7)
g: $\vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{A0}$.

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 - 4 \\ 3 - 2 \\ 1 + 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \overrightarrow{0C} + r \cdot \overrightarrow{CD}$ mit $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0D} - \overrightarrow{0C}$.

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6-2 \\ 4-0 \\ 3+5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Man sieht an den Richtungsvektoren, dass g und h parallel sind, denn $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Damit sind diese Vielfache (hätten natürlich auch gleich sein können) ⇒ g || h

Ist nun noch g = h ?

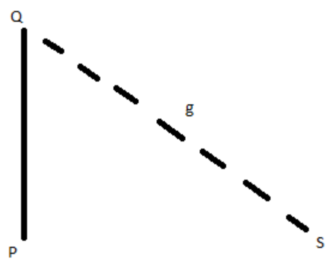
Wir prüfen nach, ob der Stützvektor von h noch auf g liegt (dann wären g und h parallel):

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 = 4 + r ⇔ r = -2
0 = 2 + r ⇔ r = -2
-5 = -1 + 2r ⇔ -4 = 2r ⇔ r = -2

Damit sind die Geraden sogar identisch.

8)



Wir bestimmen Q (Spitze des Mastes)

Q(40; 10; 0 + 12) = Q (40; 10; 12)

Die Hilfsgerade g enthält Q und verläuft in Sonnenrichtung:

g: $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Boden: z = 0

Aus g ergibt sich z = 12 – t, also 12 – t = 0 ⇔ t = 12

t = 12 in g einsetzen:

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S(52; 22; 0)$ ist Schattenpunkt von Q auf dem Boden.