Aufgaben zur Linearen Algebra mit Schwerpunkt auf Schnittpunkten und Lagebeziehungen

1) a) Es wird die Gleichung einer Geraden durch die Punkte A(4; 1; 3) und B(5; 3; 5) gesucht.
b) Liegt R(2; -3; -1) auf der Geraden aus a)?
c) Wo schneidet die Geraden aus a) die x-y-Ebene (E: z = 0)?

2) Wie ist die Lage der Geraden g und h zueinander?

a) $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$$

b) $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

c) $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\5\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

3) Wie muss a gewählt werden, damit sich

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}a\\1\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\20\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$$

scheiden, wo liegt der Schnittpunkt und wie groß ist der Schnittwinkel?

4) Es soll eine Ebene durch die Punkte P(4; 0; 0), Q(2; -1; 0) und R(1; -2; -1) gelegt werden. Wie lautet eine Gleichung dieser Ebene in Parameterform und wie in Koordinatenform?

5) Gegeben ist die Gleichung der Ebene E: -x + y + 2z = 4.
a) Wo schneidet die Ebene die z-Achse?
b) S(1; 1; r) soll in E liegen, wie muss r gewählt werden?
c) Es wird der Schnittpunkt von E mit der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\10\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

gesucht.
d) Gesucht ist eine Gleichung in Normalform und in Parameterform von E?
e) Wie groß ist der Abstand des Punktes T(0; 4; 6) zu E?
f) Wie ist die Lage von E zur Ebene E_1: 2x – 2y – 4z = 10, zur Ebene E_2: x + y – 4z = 10 und wie zur Ebene

$$E_3: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}?$$

Wenn sich die Ebenen schneiden ist auch die Schnittgerade gesucht.

Lösungen:

1) a) Geradengleichung:

g: $\vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}$.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5-4 \\ 3-1 \\ 5-3 \end{pmatrix}$$

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

(1) 2 = 4 + r
(2) -3 = 1 + 2r
(3) -1 = 3 + 2r

Die Gleichung (1) ergibt r = -2, die Gleichung (2) ergibt r = -2 und die Gleichung (3) ergibt auch r = -2. Damit hat sich bei allen drei Gleichungen dasselbe r ergeben, womit der Punkt R auf der Geraden liegt. Hätte z.B. die Gleichung (1) so ausgesehen: 2 = 4, dann hätte der Punkt nicht auf der Geraden gelegen. Wenn aber 2 = 2 die erste Gleichung gewesen wäre, dann hätte der Punkt auch auf der Geraden gelegen, wenn die Gleichungen (2) und (3), wie oben, denselben Wert für r ergeben hätten.

c) Wir setzen die z-Komponente der Geradengleichung gleich 0: 0 = 3 + 2r, also r = -3/2. Dies können wir in die Geradengleichung von g einsetzen:

$$\overrightarrow{OS_x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist S_x(5/2; -2; 0) bzw. S_x(2,5; -2; 0) der Schnittpunkt der Geraden g mit der x-y-Ebene.

2) Wie ist die Lage der Geraden g und h zueinander?

a) $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bei der Lagebeziehung schaut man erst auf die Richtungsvektoren. Sind diese identisch oder allgemein Vielfache (was das Einfache mit einschließt), dann sind die Geraden parallel oder eventuell sogar identisch. Hier ist der Richtungsvektor von h das Zweifache des Richtungsvektors von g:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Damit sind die Geraden schon mal parallel. Sind sie auch identisch? Dazu muss nur geprüft werden, ob der Stützvektor (als Ortsvektor des Stützpunktes) von h auf g (oder umgedreht der Stützvektor von g auf h) liegt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

(1) 2 = 1 + s
(2) 2 = 2 + s
(3) 3 = 3 + 2s

Die erste Gleichung ergibt s = 2 und die zweite Gleichung s = 0. Damit haben wir einen Widerspruch und damit sind die Geraden g und h echt parallel (d.h. parallel und nicht identisch).

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diese beiden Geraden sind wieder parallel, denn der Richtungsvektor von g ist das (-1)-fache des Richtungsvektors von h. Sind diese vielleicht identisch? Wie prüfen wie bei a):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

(1) 0 = 4 + 2s
(2) 0 = 2 + s
(3) 1 = -1 – s

Alle drei Gleichungen ergebe s = -2, womit die beiden Geraden identisch sind.

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Hier sind die beiden Richtungsvektoren keine Vielfache. Somit sind die beiden Geraden entweder windschief (wenn sich ein Widerspruch beim Gleichsetzen ergibt) oder sie haben einen Schnittpunkt, wenn das Gleichungssystem, was sich beim Gleichsetzen der Geradengleichungen ergibt, eine eindeutige Lösung hat (und hier kann eine Lösung nur eindeutig sein, wenn es eine gibt, denn die Richtungsvektoren sind keine Vielfache).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

(1) $1 - s = -1 - t$
(2) $4 + s = 5 - 2t$
(3) $-2 + 4s = 5 + 3t$

Wir bringen alle Parameter auf eine Seite und alle konstanten Zahlen auf die andere Seite:

(1‘) $2 = s - t$
(2‘) $-1 = -s - 2t$
(3‘) $-7 = -4s + 3t$

Wir lösen die Gleichungen (1‘) und (2‘) nach s und t auf und setzen dann zur Probe in (3‘) ein. Wenn (1‘) und (2‘) Vielfache wären (dazu zählt wie immer auch das Einfach), dann muss z.B. die Gleichung (1‘) und (3‘) ausgewählt werden.

Wir können die Gleichungen (1‘) und (2‘) direkt addieren:

(1‘) + (2‘): $1 = -3t$ ergibt $t = -1/3$

Dies setzen wir in (1‘) (es wäre auch in (2‘) möglich) ein:

$$-1 = -s + 2/3$$

Also ist $s = 5/3$. Damit können wir die Lösungen für s und t (aus (1‘) und (2‘)) in (3‘) einsetzen:

$$-7 = -20/3 - 1$$

Damit ergibt sich ein Widerspruch ($-7 = -23/3$) und die Geraden sind windschief. Wenn die Gleichung (3‘) erfüllt gewesen wäre, dann hätten sich die Geraden geschnitten. Danach hätte die Lösung für s in g oder die für t in h eingesetzt werden können, was den Schnittpunkt ergeben hätte. Aber hier gibt es keinen Schnittpunkt, denn g und h sind windschief zueinander.

3) $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Wir setzen die beiden Geradengleichungen gleich und erhalten:

(1) $a + 3s = 6 + 4t$
(2) $1 + s = 4 + t$
(3) $4 + 5s = 20 + 4t$

Wir bringen alle Variablen auf eine Seite (z.B. hier alle auf die linke Seite), was die Übersicht verbessert:

(1‘) $a + 3s - 4t = 6$
(2‘) $s - t = 3$
(3‘) $5s - 4t = 16$

Wir können hier sogar, da die unteren beiden Gleichungen kein a enthalten, diese erst mal nach s und t auflösen. Dazu addieren wir das (-4)-fache von (2‘) zu (3‘):

$$\begin{array}{lr} (-4)\cdot(2') & -4s + 4t = -12 \\ \underline{(3')} & \underline{5s - 4t = \ \ 16 \quad (+)} \\ & s = 4 \end{array}$$

s = 4 in (2‘) eingesetzt ergibt: 4 – t = 3, womit t = 1 ist.
Nun können wir s = 4 und t = 1 in (1‘) einsetzen: a + 12 – 4 = 6, womit a = -2 ist.

Damit würde

$$g_{-2}: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

die Gerade h schneiden. Um den Schnittpunkt S zu erhalten, müssen wir nur noch s = 4 in g_{-2} einsetzen oder t = 1 in h. Wir setzen in t = 1 in h ein:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 24 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ S(10; 5; 24)$$

Wir müssen den Schnittwinkel der beiden Geraden berechnen. Hier müssen wir den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ der Geraden g_{-2} und den Richtungsvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ der Geraden h in die Formel

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

einsetzen. Dies ist die Formel zur Berechnung von Winkel zwischen Vektoren, nur dass hier im Zähler zusätzlich der Betrag des Skalarproduktes steht, damit der Winkel α nicht über 90° groß wird, da es sich um einen Schnittwinkel handelt.

Es gilt:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 = 33$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{33}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{33}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{33}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{33}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{33}}\right) \approx 13{,}83°$$

Damit beträgt der Schnittwinkel ca. 13,83°.

4) Ebenengleichung in Parameterform:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{0P} + r \cdot \overrightarrow{PQ} + s \cdot \overrightarrow{PR} \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0Q} - \overrightarrow{0P} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{0R} - \overrightarrow{0P}\,.$$

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nun bestimmen wir die Koordinatenform. Wir berechnen dazu zunächst den Normalenvektor über das Vektorprodukt (siehe hierzu http://mathe-total.de/LA-Skript/AG-Ebenen.pdf S. 6 (S. 37)):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) - 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-1) \\ -2 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn sich oben ein Normalenvektor mit relativ großen Zahlen ergeben hätte, hätte man den Vektor auch verkürzen können, bevor man dessen Komponenten unten einsetzt. Ebene in Koordinatenform (bzw. eine mögliche Darstellung davon):

E: $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = c$

E: $x - 2y + z = c$

Wir setzen nun einen Punkt von E ein (z.B. P, aus dem Stützvektor):

$4 = c$

Damit gilt: E: $x - 2y + z = 4$

Wir auch erst die Normalform bestimmen können, die ausmultipliziert die Koordinatenform ergibt.
Die Normalform ist übrigens:

$$E:\ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Dabei ist $\vec{n}$ wieder der Normalvektor von oben (oder ein Vielfaches von diesem) und $\vec{p}$ ein Ortsvektor der Ebene, z.B. der Stützvektor $\overrightarrow{0P}$ von oben. Also eine mögliche Darstellung in der Normalform von E ist:

$$E:\ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

4) Gegeben ist die Gleichung der Ebene E: $-x + y + 2z = 4$.

a) Die z-Achse wird im Punkt P(0; 0; z) geschnitten, also müssen wir in der Ebenengleichung x und y auf 0 setzen: $2z = 4$, also $z = 2$ und der Schnittpunkt mit der z-Achse ist P(0; 0; 2).

b) Wir setzen S(1; 1; r) in die Gleichung von E ein, denn alle Punkte, die in E liegen, erfüllen die Koordinatengleichung: $-1 + 1 + 2r = 4$, also ist $r = 2$ und S(1; 1; 2).

c) Wir müssen zur Berechnung des Schnittpunktes von E die Komponenten von

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in die Koordinatengleichung von E einsetzen. Aus der Geradengleichung ergibt sich x = 2 – t, y = 10 + 2t und z = 3 + t, was wir in die Gleichung von E einsetzen:

$$\begin{aligned} -x + y + 2z &= 4 \\ -(2 - t) + 10 + 2t + 2\cdot(3 + t) &= 4 \\ 5t + 14 &= 4 \end{aligned}$$

Damit ist t = -2. Hätte sich z.B. 14 = 4 ergeben, wäre g parallel zu E gewesen und bei z.B. 4 = 4 hätte g in E gelegen. Wie haben aber einen Schnittpunkt Q, den wir berechnen können, wenn wir t = -2 in g einsetzen:

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(4; 6; 1)$$

d) Eine Gleichung in Normalform von E erhalten wir, indem wir zunächst einen Punkt R in E bestimmen. Der Punkt muss die Gleichung von E erfüllen. Wir haben bereits oben schon Punkte bestimmt, wir können aber auch R(0; 4; 0) nehmen, der liegt auch in E (denn er erfüllt die Gleichung -x + y + 2z = 4). Die Komponenten des Normalenvektors sind die Faktoren vor x, y und z in der Koordinatengleichung, also:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

E: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ mit z.B. $\vec{p} = \overrightarrow{OR}$

E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ (ist eine Gleichung von E in Normalform)

Eine Gleichung in Parameterform von E kann man über drei Punkt bestimmen, die in E liegen. Diese finden wir schnell, wenn wir die Koordinatengleichung anschauen (man müsste nur für z.B. x und y Zahlen einsetzen und nach z auflösen). Eine einfachere Möglichkeit ist aber die, dass wir die Koordinatengleichung nach x oder y oder z auflösen, wir wählen y:

$$-x + y + 2z = 4 \Leftrightarrow y = 4 + x - 2z \quad (*)$$

Nun setzen wir x = r und z = s:

$$\begin{aligned} x &= \quad r \\ y &= 4 + r - 2s \quad \text{(aus (*))} \\ z &= \qquad\quad s \end{aligned}$$

Das müssen wir nur in die Vektorform schreiben und schon haben wir eine Darstellung in Parameterform:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Form, über die man am schnellsten prüfen kann, ob ein Punkt in der Ebene liegt oder über die man am besten einen Schnittpunkt mit einer Geraden bestimmen kann, mit der man auch am einfachsten Abstände berechnen kann, das ist die Koordinatenform (oder die Normalform, wobei die Koordinatenform nur die ausmultiplizierte Normalform ist).

e) Wir bestimmen die Hesse Normalform, wobei wir aber die Koordinatengleichung verwenden, also die ausmultiplizierte Normalform. Wir müssen nur die Koordinatengleichung umformen, dass auf einer Seite ein Null steht und dann durch die Länge bzw. den Betrag des Normalenvektor dividieren:

$$E:\ n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - c = 0 \quad | : |\vec{n}|$$

$$E: \frac{n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - c}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

Der Abstand eines Punktes (x; y; z) zu E ergibt sich dann allgemein durch

$$d = \left| \frac{n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - c}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$$

In der Aufgabe:

$$E: -x + y + 2z = 4$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

Wir setzen den Punkt T(0; 4; 6) in

$$d = \left| \frac{-x + y + 2z - 4}{\sqrt{6}} \right|$$

ein:

$$d = \left| \frac{-0 + 4 + 2 \cdot 6 - 4}{\sqrt{6}} \right| = \frac{12}{\sqrt{6}} \approx 4{,}90$$

Also beträgt der Abstand des Punktes T zur Ebene E ca. 4,90 LE.

f) Lagebeziehungen von Ebenen Koordinatenform sind einfach zu erkennen. Sind die Ebenengleichungen Vielfache voneinander, sind die Ebenen natürlich identisch. Sind die linken Seiten (bei der Form $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = c$) bzw. die Normalenvektoren Vielfache, dann sind die Ebenen erst einmal parallel. Ist die rechte Seite (auf der die Konstante steht) in so einem Fall nicht das gleiche Vielfache, sind diese nicht identisch und somit echt parallel.

Vergleichen wir

$$E: -x + y + 2z = 4$$

mit

$$E_1: 2x - 2y - 4z = 10,$$

so sehen wir, dass die Normalenvektoren Vielfache sind (die linke Seite von E mal (-2) ergibt die linke Seite von E_1) die rechte Seite ist aber nicht das (-2)-fache. Damit sind die Ebenen echt parallel. Wäre E_1: $2x - 2y - 4z = -8$ gewesen, so wären die Ebenen identisch.

Zur Ebene E_2: $x + y - 4z = 10$.

Hier sind die Normalenvektoren keine Vielfache, somit schneiden sich die Ebenen in einer Schnittgeraden. Dies kann man bestimmen, wenn man das unterbesetzte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x + y + 2z &= 4 \\ x + y - 4z &= 10 \end{aligned}$$

löst. Wir eliminieren x, indem wir die beiden Gleichungen addieren:

$$2y - 2z = 14 \quad (**)$$

Nun müssen wir y oder z auf einen Parameter, z.B. t, setzen. Wenn sich $-2z = 14$ ergeben hätte, wäre z fest und es müsste y (oder allgemein auch x) auf t gesetzt werden. Wir setzen $z = t$ in (**):

$$2y - 2t = 14$$

Nach y aufgelöst erhalten wir $y = t + 7$, was wir nun (mit $z = t$) z.B. in die obere Gleichung (von E) einsetzen können:

$$-x + t + 7 + 2t = 4$$

Wir erhalten $x = 3t + 3$. Also ist die Gerade durch

$$\begin{aligned} x &= 3 + 3t \\ y &= 7 + t \\ z &= \quad\;\; t \end{aligned}$$

gegeben, was in Vektorform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist. Damit haben wir eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen E und E_2 gefunden.

Zur Ebene E_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Diese könnten wir in Koordinatenform umformen, oder wir setzen diese in E ein, was auch noch relativ einfach ist, da E in Koordinatenform gegeben ist.

Die Komponenten von E_3:

$$x = 6 + 4r + s$$
$$y = 4 + 2r - s$$
$$z = 3 + r + s$$

Diese setzen wir in E ein:

$$-x + y + 2z = 4$$

$$-(6 + 4r + s) + 4 + 2r - s + 2\cdot(3 + r + s) = 4$$

$$4 = 4$$

Also sind hier E und E_3 identisch.

Hätte sich z.B. $r + 2s = 4$ statt $4 = 4$ ergeben, dann hätten sich die Ebenen geschnitten. In so einem Fall kann nach r (oder s) aufgelöst werden. Die Lösung z.B. für r kann dann in die Gleichung von E_3 eingesetzt werden, womit sich in so einem Fall die Schnittgerade ergeben hätte. Wenn beide Parameter - wie in unserem Beispiel - verschwinden, sind die Ebenen identisch, wenn sich eine Gleichung ergibt, die immer wahr ist (wie $4 = 4$), egal welche Werte r und s haben. Hätte sich ein Widerspruch ergeben, z.B. $5 = 4$, dann wären die Ebenen echt parallel gewesen.