Aufgaben zu Exponentialfunktionen

1) Der Abkühlungsvorgang einer Tasse Kaffee lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:

$T(t) = 20 + 40e^{-k\cdot t}$. Dabei ist T(t) die Temperatur in Grad C nach t Minuten und $k > 0$.

a) Wie hoch ist die Anfangstemperatur?

b) Nach 4 Minuten ist der Kaffee noch 35° warm. Welchen Wert hat dann k?

c) Wie lange muss gewartet werden, wenn (mit k = 0,2) die Kaffeetemperatur 30°C betragen soll?

d) Welche Temperatur hat der Kaffee nach 8 Minuten (für k = 0,2)?

e) Welche Temperatur wird langfristig angestrebt?

2) Wie lauten die Extrempunkte von $f(x) = (-2x^2+10)\cdot e^{-0,5x}$?

3) a) Es werden die Wendepunkte von $f(x) = e^{-x^2}$ gesucht.

b) Welche Symmetrieeigenschaften hat $f(x) = e^{-x^2}$?

4) Das Wachstum einer Rehpopulation wird durch folgende Funktion beschrieben: $f(t) = \frac{200}{1+19\cdot e^{-0,8\cdot t}}$

Dabei t die Zeit in Jahren und f(t) die Anzahl Rehe. Diese Funktion ist vom Typ her eine sogenannte logistische Funktion, die zwei Asymptoten besitzt.

a) Wie viele Rehe sind es am Anfang?

b) Wie groß ist die Grenzpopulation (Anzahl Rehe auf lange Sicht)?

c) Wann sind es 50 Rehe?

d) Wann nimmt die Population am stärksten zu (nur notwendige Bedingung nötig)?

e) Gesucht wird der Graph von f für $0 \leq t \leq 10$.

Lösungen:

1) $T(t) = 20 + 40e^{-k \cdot t}$

a) Anfangstemperatur: $T(0) = 20 + 40e^0 = 60$, also 60° C.

b) Nach 4 Minuten ist der Kaffee noch 35° warm. Welchen Wert hat dann k?
Wir müssen die Gleichung T(4) = 35 nach k auflösen.

$$
\begin{aligned}
T(4) = 20 + 40 \cdot e^{-4k} &= 35 && \mid -20 \\
40 \cdot e^{-4k} &= 15 && \mid :40 \\
e^{-4k} &= 3/8 && \mid \ln(\ ) \\
-4k &= \ln(3/8) && \mid :(-4) \\
k &= -\ln(3/8)/4 \approx 0{,}2452
\end{aligned}
$$

c) Wie lange muss gewartet werden, wenn (mit k = 0,2) die Kaffeetemperatur 30°C betragen soll?

Wir lösen die Gleichung T(t) = 30 nach t auf, womit wir dann die Zeit erhalten, die abgewartet werden muss.

$$
\begin{aligned}
20 + 40 \cdot e^{-0{,}2t} &= 30 && \mid -20 \\
40 \cdot e^{-0{,}2t} &= 10 && \mid :40 \\
e^{-0{,}2t} &= ¼ && \mid \ln(\ ) \\
-0{,}2t &= \ln(1/4) && \mid : (-0{,}2) \\
t &= -\frac{\ln(1/4)}{0{,}2} \approx 6{,}9314
\end{aligned}
$$

Also muss ca. 6,93 Minuten gewartet werden, damit der Kaffee nur noch 30° C warm ist.

d) Temperatur nach 8 Minuten:

$T(8) = 20 + 40 \cdot e^{-0{,}2 \cdot 8} \approx 28{,}0759$, also ca. 28,08°C

e) Welche Temperatur wird langfristig ungefähr werden?

$$\lim_{t \to \infty} 20 + 40e^{-kt} = 20$$

Also wird sich die Temperatur 20°C annähern.

2) Wie lauten die Extrempunkte von $f(x) = (-2x^2+10) \cdot e^{-0{,}5x}$

$$
\begin{aligned}
u(x) &= -2x^2 + 10 & u'(x) &= -4x \\
v(x) &= e^{-0{,}5x} & v'(x) &= -0{,}5 \cdot e^{-0{,}5x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = -4x \cdot e^{-0{,}5x} - 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5x} \cdot (-2x^2 + 10) = (-4x - 0{,}5 \cdot (-2x^2 + 10)) \cdot e^{-0{,}5x} \\
&= (x^2 - 4x - 5) \cdot e^{-0{,}5x}
\end{aligned}
$$

Analog:
$$
\begin{aligned}
f''(x) &= (2x - 4) \cdot e^{-0{,}5x} - 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5x} \cdot (x^2 - 4x - 5) = (2x - 4 - 0{,}5 \cdot (x^2 - 4x - 5)) \cdot e^{-0{,}5x} \\
&= (-0{,}5x^2 + 4x - 1{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}
\end{aligned}
$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$ (und $e^{-0,5x} = 0$, was aber keine Lösung hat)

Damit ergibt sich mit der p-q-Formel $x_1 = 5$ und $x_2 = -1$.

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(5) = 6 \cdot e^{-2,5} > 0$, also Tiefpunkt.
$f''(-1) = -6 \cdot e^{0,5} < 0$, also Hochpunkt.

In $f(x)$ einsetzen: $f(5) = -40 \cdot e^{-2,5} \approx -3,28$. Also ist $E_1(5; -40 \cdot e^{-2,5}) \approx E_2(5; -3,28)$ ist ein Tiefpunkt.
$f(-1) = 8 \cdot e^{0,5} \approx 13,19$. Also ist $E_2(-1; 8 \cdot e^{0,5}) \approx E_2(-1; 13,19)$ ist ein Hochpunkt.

3) a) Es werden die Wendepunkte von $f(x) = e^{-x^2}$ gesucht.

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$u(x) = -2x \qquad u'(x) = -2$
$v(x) = e^{-x^2} \qquad v'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} (-2x)$
$= (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$

$f'''(x) = 8x \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2) = (8x - 2x \cdot (4x^2 - 2)) \cdot e^{-x^2}$
$= (-8x^3 + 12x) \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2 = 0$ (und $e^{-x^2} = 0$, was aber keine Lösung hat)

$4x^2 - 2 = 0 \qquad | +2$
$4x^2 = 2 \qquad | :4$
$x^2 = 1/2 \qquad | \sqrt{}$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{1/2} \approx \pm 0,707$

$f'''(\sqrt{1/2}) \approx 3,43 \neq 0$, also liegt an der Stelle $x = \sqrt{1/2}$ ein Wendepunkt vor.
$f'''(-\sqrt{1/2}) \approx -3,43 \neq 0$, also liegt an der Stelle $x = -\sqrt{1/2}$ ein Wendepunkt vor.

$f(\sqrt{1/2}) = e^{-1/2} \approx 0,607$
$f(-\sqrt{1/2}) = e^{-1/2} \approx 0,607$ (ist klar, wegen der Symmetrie)

$W_1(\sqrt{1/2};\ e^{-1/2}) \approx W_1(0,707; 0,607)$
$W_2(-\sqrt{1/2}; e^{-1/2}) \approx W_2(-0,707; 0,607)$

b) Welche Symmetrieeigenschaften hat $f(x) = e^{-x^2}$?

Achsensymmetrisch zur y-Achse, denn $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$.

4) Das Wachstum einer Rehpopulation wird durch folgende Funktion bestimmt: $f(t) = \frac{200}{1+19 \cdot e^{-0,8 \cdot t}}$

Dabei t die Zeit in Jahren und f(t) die Anzahl Rehe.

a) Wie viele Rehe sind es am Anfang?

$f(0) = \frac{200}{1+19 \cdot e^{0}} = 10$. Also sind es am Anfang 10 Rehe.

b) Wie groß ist die Grenzpopulation (Anzahl Rehe auf lange Sicht)?

$\lim_{n \to \infty} f(t) \quad = \lim_{n \to \infty} \frac{200}{1+19 \cdot e^{-0,8 \cdot t}} = \frac{200}{1+19 \cdot 0} = 200$, da $\lim_{n \to \infty} e^{-0,8t} = 0$.

Damit strebt die Population langfristig gegen 200 Rehe.

c) Wann sind es 50 Rehe? (Es wird $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ und $e^a/e^b = e^{a-b}$ verwendet.)

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 50 \\
\frac{200}{1+19 \cdot e^{-0,8 \cdot t}} &= 50 && | \cdot (1 + 19 \cdot e^{-0,8 \cdot t}) \\
200 &= 50 \cdot (1 + 19 \cdot e^{-0,8 \cdot t}) && | : 50 \\
4 &= 1 + 19 \cdot e^{-0,8 \cdot t} && | - 1 \\
3 &= 19 \cdot e^{-0,8 \cdot t} && | : 19 \\
3/19 &= e^{-0,8 \cdot t} && | \ln(\ ) \\
\ln(3/19) &= -0,8t && | : (-0,8) \\
t &\approx 2,31
\end{aligned}
$$

Also sind es nach ca. 2,31 Jahre 50 Rehe.

d) Wann nimmt die Population am stärksten zu (nur notwendige Bedingung nötig)?

Im Wendepunkt ist allgemein die Steigung lokal extremal und bei dieser Funktion sogar global. Wir müssen somit die Wendestelle bestimmen, durch die notwendige Bedingung für Wendestellen $f''(t) = 0$. Dazu bestimmen wir die ersten beiden Ableitungen.

$$f(t) = \frac{200}{1+19 \cdot e^{-0,8 \cdot t}} = \frac{u(t)}{v(t)}$$

Zur Vorbereitung der Quotientenregel:

$u(t) = 200 \quad \Longrightarrow \quad u'(t) = 0$

$v(t) = 1 + 19 \cdot e^{-0,8 \cdot t} \quad \Longrightarrow \quad v'(t) = 19 \cdot (-0,8) \cdot e^{-0,8 \cdot t} = -15,2 \cdot e^{-0,8 \cdot t}$

$$f'(t) = \frac{u'(t) \cdot v(t) - v'(t) \cdot u(t)}{(v(t))^2} = \frac{0 \cdot (1 + 19 \cdot e^{-0,8 \cdot t}) - (-15,2 \cdot e^{-0,8 \cdot t}) \cdot 200}{(1 + 19 \cdot e^{-0,8 \cdot t})^2}$$

$$= \frac{3040 \cdot e^{-0,8 \cdot t}}{(1 + 19 \cdot e^{-0,8 \cdot t})^2}$$

f' hätte auch mit der Kettenregel bestimmt werden können, denn $f(t) = 200 \cdot (1 + 19 \cdot e^{-0,8 \cdot t})^{-1}$.

Wir bestimmen die zweite Ableitung:

$u(t) = 3040 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} \quad \Longrightarrow \quad u'(t) = 3040 \cdot (-0{,}8) \cdot e^{-0{,}8\cdot t} = -2432 \cdot e^{-0{,}8\cdot t}$

$v(t) = (1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t})^2 \quad \Longrightarrow \quad v'(t) = 19 \cdot (-0{,}8) \cdot e^{-0{,}8\cdot t} \cdot 2 \cdot (1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t})$

$v'(t) = -30{,}4 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} \cdot (1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t})$

$$f''(t) = \frac{u'(t) \cdot v(t) - v'(t) \cdot u(t)}{\left(v(t)\right)^2}$$

$$= \frac{-2432 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} \cdot (1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t})^2 - (-30{,}4 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} \cdot (1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t})) \cdot 3040 \cdot e^{-0{,}8\cdot t}}{((1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t})^2)^2}$$

$$= \frac{-2432 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} \cdot (1 + 19e^{-0{,}8\cdot t})^2 + 30{,}4 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} \cdot (1 + 19e^{-0{,}8\cdot t}) \cdot 3040 \cdot e^{-0{,}8\cdot t}}{(10 + 190 \cdot e^{-0{,}8\cdot t})^4}$$

$$= \frac{(1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t}) \cdot [-2432 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} \cdot (1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t}) \quad + 30{,}4 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} \cdot 3040 \cdot e^{-0{,}8\cdot t}]}{(1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t})^4}$$

$$= \frac{-2432 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} \cdot (1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t}) \quad + 30{,}4 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} \cdot 3040 \cdot e^{-0{,}8\cdot t}}{(1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t})^3}$$

$$= \frac{-2432 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} - 46208 \cdot e^{-1{,}6\cdot t} \quad + 92416 \cdot e^{-1{,}6\cdot t}}{(1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t})^3}$$

$$= \frac{-2432 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} + 46208 \cdot e^{-1{,}6\cdot t}}{(1 + 19 \cdot e^{-0{,}8\cdot t})^3}$$

$f''(t) = 0$

$-2432 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} + 46208 \cdot e^{-1{,}6\cdot t} = 0$	$\mid - 46208 \cdot e^{-1{,}6\cdot t}$
$-2432 \cdot e^{-0{,}8\cdot t} = -46208 \cdot e^{-1{,}6\cdot t}$	$\mid : (-2432)$
$e^{-0{,}8\cdot t} = 19 \cdot e^{-1{,}6\cdot t}$	$\mid : e^{-1{,}6\cdot t}$
$e^{0{,}8\cdot t} = 19$	$\mid \ln(\,)$
$0{,}8t = \ln(19)$	$\mid : 0{,}8$
$t \approx 3{,}68$	

Also nach ca. 3,68 Jahren ist der Anstieg am größten. Übrigens: f(3,68…) bzw. f(ln(19)/0,8) = 100.

e) Der Graph von f: