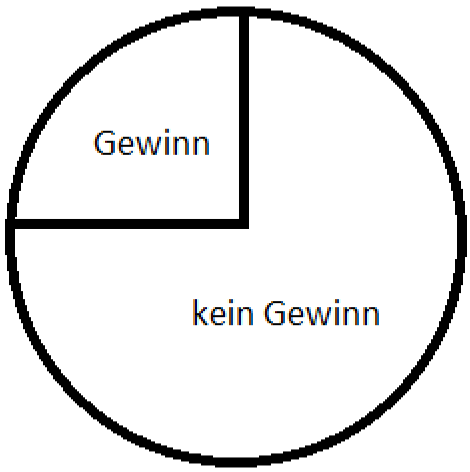
Aufgaben zur Stochastik

Wahrscheinlichkeiten über Baumdiagramme und bei Binomialverteilung bestimmen

1) Laura und Xenia gehen auf ein Fest.
a) An einem Losestand gibt es 2 Gefäße mit Losen.
Im ersten Gefäß befinden sich 100 Lose, davon 20 Gewinne.
Im zweiten Gefäß befinden sich 40 Lose, davon 30 Gewinne.
a_1) Laura wählt zufällig ein Gefäß und zieht ein Los. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie einen Gewinn zieht?
a_2) Aus dem ersten Gefäß zieht sie dann 3 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Gewinn dabei ist?
a_3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Gewinn, wenn sie aus dem zweiten Gefäß 3 Lose zieht?

b) Sie gehen an einen Schießstand. Xenia trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%.
b_1) Xenia schießt 10-mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft sie genau 8-mal?
b_2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft sie mindestens 5-mal bei den 10 Schüssen?
b_3) Wie viele Treffer wären bei Xenia bei 20 Schüssen zu erwarten?
b_4) Warum handelt es sich bei dem Aufgabenteil b_1) um eine Bernoulli-Kette?
b_5) Laura trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 40%. Wenn beide jeweils einen Schuss abgeben, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer?

c) Bei einem Glücksrad, bei dem ein Kreisviertel einen Gewinn anzeigt, dreht Laura 20-mal.

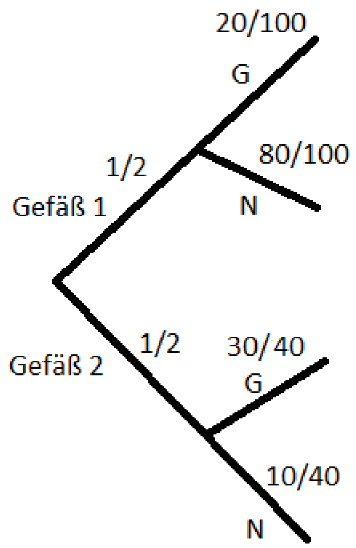


Xenia behauptet, es stimmt was nicht mit dem Glücksrad und sie würden seltener gewinne, als angegeben (H_0: $p \geq 1/4$, H_1: $p < 1/4$).

c_1) Sie möchte sich beschweren, wenn sie höchstens 3-mal gewinnen. Wie groß wäre hier die Fehlerwahrscheinlichkeit α?
c_2) Wie müsste die Entscheidungsregel geändert werden, wenn die Fehlerwahrscheinlichkeit α (also dafür, dass sie zu Unrecht behaupten, dass etwas nicht stimmt) höchstens 5% betragen soll?

Lösungen:

1) a_1) Laura wählt zufällig ein Gefäß und zieht ein Los. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie einen Gewinn zieht? Hier ist das Baumdiagramm:



Da wir keine näheren Informationen haben, müssen wir davon ausgehen, dass die Wahrscheinlichkeiten für die Wahl einer der Urnen jeweils gleich sind („Laplace“) und damit muss diese für jede Urne ½ betragen. Danach kann man in dem Gefäß 1 mit einer Wahrscheinlichkeit von 20/100 einen Gewinn ziehen und in Gefäß zwei mit einer Wahrscheinlichkeit von 30/40. G steht in der Grafik oben für Gewinn und N für Niete.

P(Gewinn) = $1/2 \cdot 20/100 + 1/2 \cdot 30/40 = 19/40 = 0{,}475 = 47{,}5\%$

a_2) Aus dem ersten Gefäß zieht sie dann noch 3 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Gewinn dabei ist?

Die Aufgabe könnten wir mit einem Baumdiagramm lösen (zeihen ohne Zurücklegen), einfacher ist es aber über den Binomialkoeffizienten:

P(genau ein Gewinn) = $\frac{\binom{20}{1}\cdot\binom{80}{2}}{\binom{100}{3}} = \frac{632}{1617} \approx 0{,}3909 = 39{,}09\%$

Im Nenner stehen die Anzahl der Möglichkeiten, aus 100 Lose drei zu ziehen. Im Zähler stehe die Anzahl der Möglichkeiten, dass aus den 20 Gewinnen einer gezogen wird und aus den 80 Nieten zwei. Hier steht genau genommen sogar eine bedingte Wahrscheinlichkeit, nämlich die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn unter der Bedingung, dass aus dem ersten Gefäß gezogen wird.

a_3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Gewinn, wenn sie aus dem zweiten Gefäß 3 Lose zieht?

P(mindestens ein Gewinn) = P(genau 1 Gewinn) + P(genau 2 Gewinne) + P(genau 3 Gewinne)
= 1 – P(keinen Gewinn)

$$= 1 - \frac{\binom{30}{0}\cdot\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{244}{247} \approx 0{,}9879 = 98{,}79\%$$

b) Xenia trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%.
b_1) Xenia schießt 10-mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft sie genau 8-mal?
Binomialverteilung mit n = 10 und p = 0,6:

$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}6^8 \cdot 0{,}4^2 \approx 0{,}1209 = 12{,}09\%$

b2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft sie mindestens 5-mal bei den 10 Schüssen?
Binomialverteilung mit n = 10 und p = 0,6:
$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0{,}1662 = 0{,}8338 = 83{,}38\%$

Den Wert 0,1662 kann man der Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung entnehmen, oder man könnte auch den Taschenrechner verwenden:

$$\sum_{x=0}^{4} \binom{10}{x} \cdot 0{,}6^x \cdot 0{,}4^{10-x}$$

Wobei hier auch $P(X \geq 5)$ direkt mit

$$\sum_{x=5}^{10} \binom{10}{x} \cdot 0{,}6^x \cdot 0{,}4^{10-x}$$

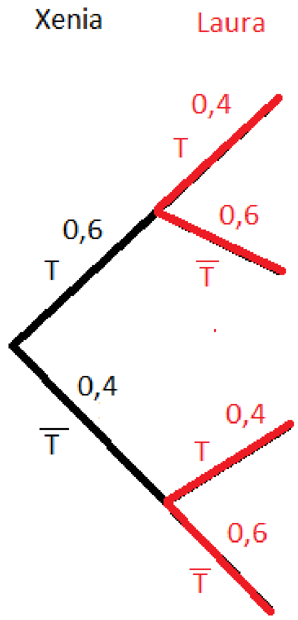
berechnet werden kann.

b_3) Wie viele Treffer wären bei Xenia bei 20 Schüssen zu erwarten?
Binomialverteilung mit n = 20 und p = 0,6:
$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}6 = 12$, also sind 10 Treffer zu erwarten.

b_4) Warum handelt es sich bei dem Aufgabenteil b_1) um eine Bernoulli-Kette? Bei b_1) wird insgesamt 10-mal unabhängig voneinander (kein Experiment beeinfluss das andere) ein Bernoulli-Experiment durchgeführt. Ein Bernoulli-Experiment ist ein Experiment mit zwei Ausgängen. Für die Wahrscheinlichkeit des Ausgangs, für den man sich interessiert, wir allgemein die Variable p verwendet (in der Aufgabe geht es um die Anzahl der Treffer und die Trefferwahrscheinlichkeit ist 60%, also p = 0,6). Wird dieses Experiment nun 10-mal (oder allgemein n-mal) durchgeführt, dann spricht man von einer Bernoulli-Kette. Dabei muss natürlich die Wahrscheinlichkeit p immer gleich bleiben. Die Anzahl des Auftretens eines bestimmten Ereignisses (wie die Anzahl der Gewinne in der Aufgabe, wobei man natürlich auch die Anzahl der Verluste nehmen könnte, wobei p dann 0,4 wäre) ist dann binomialverteilt. Eine Bernoulli-Kette liegt damit natürlich auch bei b_2) und b_3) vor.

Bei a_2) kommt man zu keiner Binomialverteilung. Es gibt zwar nur 2 Ausgänge bei jedem einzelnen Zug, aber die Wahrscheinlichkeit ändert sich bei jedem Zug. Bei sehr vielen Losen wäre die Anzahl der Gewinne näherungsweise binomialverteilt (aber nicht genau), wenn sich p nur minimal bei einem Zug ändern würde.

b_5) Laura trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 40%. Wenn beide jeweils einen Schuss abgeben, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer?



Wir haben oben ein Baumdiagramm gezeichnet. Es ist dabei egal, ob mit Xenia oder Laura begonnen wird. T steht für Treffer und $\overline{T}$ für keinen Treffer. Es ist oben Zufall, dass Xenia mit 60% trifft und Laura genau mit dieser Wahrscheinlichkeit nicht trifft. Wäre die Trefferwahrscheinlichkeit von Laura z.B. 30%, dann wäre dies nicht der Fall, denn dann wäre die Wahrscheinlichkeit für keinen Treffer bei Laura gleich 70%.

P(mindestens einen Treffer) = P(Xenia trifft und Laura trifft nicht) + P(Xenia nicht und Laura trifft)
+ P(Xenia trifft und Laura trifft) = $0,6 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,76$

Einfacher:

P(mindestens einen Treffer) = 1 – P(beide treffen nicht) = $1 - 0,4 \cdot 0,6 = 0,76$ = 76%

c) Bei einem Glücksrad, bei dem ein Kreisviertel einen Gewinn anzeigt, dreht Laura 20-mal. Xenia behauptet, es stimmt was nicht mit dem Glücksrad und sie würden seltener gewinne, als angegeben (H0: $p \geq 1/4$, H1: $p < 1/4$).

c_1) Sie möchte sich beschweren, wenn sie höchstens 3-mal gewinnen. Wie groß wäre hier die Fehlerwahrscheinlichkeit α?

α = P(höchstens 3 Gewinne, wenn die Angabe p = 1/4 stimmt)
= $P(X \leq 3)$, wobei X binomialverteilt ist, mit n = 20 und p = 1/4
$\approx 0,2252$

Mit dem Taschenrechner könnte man die Wahrscheinlichkeit für P(X ≤ 3) auch berechnen mit:

$$\sum_{x=0}^{3} \binom{20}{x} \cdot 0{,}25^{x} \cdot 0{,}75^{20-x}$$

Hier ist nochmal die Tabelle für die Binomialverteilung mit n = 20 und p = 1/4:

k	P(X = k)	P(X ≤ k)
0	0,003171	0,003171
1	0,021141	0,024313
2	0,066948	0,09126
3	0,133896	0,225156
4	0,189685	0,414842
5	0,202331	0,617173
…	…	…

c_2) Wie müsste die Entscheidungsregel geändert werden, wenn die Fehlerwahrscheinlichkeit α (also dafür, dass sie zu Unrecht behaupten, dass etwas nicht stimmt) höchstens 5% betragen soll?

Hier muss das größte k aus der Tabelle oben abgelesen werden, für das

P(X ≤ k) ≤ α = 0,05

gilt, also ist k = 1. Damit dürfte man sich erst beschweren, wenn man höchstens einmal gewinnt, wenn man sich mit höchstens einer Wahrscheinlichkeit von 5% zu Unrecht beschweren möchte, denn mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 2,43% (siehe Tabelle oben) kann gewinnt man auch höchstens einmal, selbst wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit pro drehen 25% wär.

Mit dem Taschenrechner müsse man verschiedene k hier einsetze

$$\sum_{x=0}^{k} \binom{20}{x} \cdot 0{,}25^{x} \cdot 0{,}75^{20-x}$$

und schauen, für welches maximale k diese Summe noch kleiner oder gleich 0,05 (= α) ist.