Aufgaben für die Oberstufe zur Differentialrechnung

1) Es soll jeweils die erste Ableitung bestimmt werden:

a) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 6x + 3$

b) $f(x) = x \cdot (x^3 - 4)$

c) $f(x) = 2 \cdot (x^2 - 4x)$

d) $f(x) = a \cdot x^3 + b^3$

e) $f(x) = 4/x^3 - x^2$

f) $f(x) = \frac{x^3 + 5x + 2}{x^2}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1/\sqrt[4]{x}$

h) $f(x) = (x - 2)^2$

i) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x + c$

j) $f(a) = a^3 \cdot x + a \cdot x^3$

2) Es soll die jeweils erste Ableitung bestimmt werden (mit der Produktregel):

a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

b) $f(x) = \sin^2(x)$ $\quad (\sin^n(x) = (\sin(x))^n)$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

d) $f(x) = x \cdot \sin(x) \cdot e^x$

e) $f(x) = 2x^3 \cdot \cos(x)$

Tipps: $(\sin(x))' = \cos(x)$, $\quad (\cos(x))' = -\sin(x)$, $\quad (e^x)' = e^x$.

3) Es sollen jeweils die ersten Ableitungen bestimmt werden (mit der Quotientenregel):

a) $f(x) = \frac{4}{x^2 + 3}$

b) $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 + 4}$

c)) $f(x) = \frac{3x}{\sin(x)}$

d) $f(x) = \frac{4x}{e^x}$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 4x + 2}$

Lösungen:

1) Es soll jeweils die erste Ableitung bestimmt werden:

a) $f'(x) = 3x^2 – 16x + 6$

b) $f(x) = x \cdot (x^3 – 4) = x^4 – 4x$
$f'(x) = 4x^3 – 4$

c) $f(x) = 2 \cdot (2x – 4)$ (Konstanter Faktor)

d) $f'(x) = 3a \cdot x^2$

e) $f(x) = 4x^{-3} – x^2$ $(1/x^n = x^{-n})$
$f'(x) = -12x^{-4} – 2x = -12/x^4 – 2x$

f) $f(x) = \frac{x^3+5x+2}{x^2} = x + 5x^{-1} + 2x^{-2}$
$f'(x) = 1 – 5x^{-2} – 4x^{-3}$

g) $f(x) = x^{1/3} – x^{-1/4}$ $(\sqrt[n]{x} = x^{1/n})$
$f'(x) = 1/3 \cdot x^{-2/3} + 1/4 \cdot x^{-5/4}$

h) $f(x) = (x – 2)^2 = x^2 – 4x + 4$
$f'(x) = 2x – 4$

i) $f(x) = 3a \cdot x^2 + b$
$f'(x) = 6a \cdot x$

j) $f(a) = 3a^2 \cdot x + x^3$
$f'(a) = 6a \cdot x$

2) Es soll die jeweils erste Ableitung bestimmt werden (mit der Produktregel):

a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

$u(x) = x$ $u'(x) = 1$
$v(x) = \sin(x)$ $v'(x) = \cos(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

Bemerkung:
Es kann $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ *oder* $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$ *geschrieben werden, das ist klar. Bei Funktionen vom Typ* $f(x) = (2x + 2) \cdot e^{-1/2 \cdot x}$ *ist die zweite Variante einfacher zu schreiben, denn hier ist*

$u(x) = 2x + 2$ $u'(x) = 2$
$v(x) = e^{-1/2 \cdot x}$ $v'(x) = -1/2 \cdot e^{-1/2 \cdot x}$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = 2 \cdot e^{-1/2 \cdot x} – 1/2 \cdot e^{-1/2 \cdot x} \cdot (2x + 2) = (2 – 1/2 \cdot (2x + 2)) \cdot e^{-1/2 \cdot x} = (-x + 1) \cdot e^{-1/2 \cdot x}$

Für erfahrene Umformerinnen und Umformer ist es zwar kein Problem, bei Schülerinnen oder Schüler kann es aber etwas schwerer erscheinen, wenn sich

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = 2 \cdot e^{-1/2 \cdot x} + (2x + 2) \cdot (– 1/2) \cdot e^{-1/2 \cdot x}$

ergibt, was die Erfahrung bei der Nachhilfe zeigte. Wohl bemerkt, beides ist natürlich das gleiche.

b) $f(x) = \sin^2(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$

$u(x) = \sin(x)$ $u'(x) = \cos(x)$
$v(x) = \sin(x)$ $v'(x) = \cos(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = \cos(x) \cdot \sin(x) + \sin(x) \cdot \cos(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = 1 \cdot e^x + e^x \cdot x = (1 + x) \cdot e^x$

Hier konnte auch ausgeklammert werden, was für die Aufgabe zwar nicht notwendig war, wenn eine Kurvendiskussion mit dieser Funktion durchgeführt werden soll, ist dies aber hilfreich.

d) $f(x) = x \cdot \sin(x) \cdot e^x$

$u(x) = x \cdot \sin(x)$	$u'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$

Oben wurde bei der Ableitung von u nochmal die Produktregel benötigt.

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = (\sin(x) + x \cdot \cos(x)) \cdot e^x + x \cdot \sin(x) \cdot e^x$

Dies wäre auch, wenn man ausklammert:

$f'(x) = (\sin(x) + x \cdot \cos(x) + x \cdot \sin(x)) \cdot e^x$

Es gibt sogar auch eine Regel für das Produkt aus drei Funktionen, die direkt aus der Produktregel für zwei Funktionen folgt:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$

e) $f(x) = 2x^3 \cdot \cos(x)$

$u(x) = 2x^3$	$u'(x) = 6x^2$
$v(x) = \cos(x)$	$v'(x) = -\sin(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = 6x^2 \cdot \cos(x) - 2x^3 \cdot \sin(x)$

3) Es sollen jeweils die ersten Ableitungen bestimmt werden (mit der Quotientenregel):

a) $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$

$u(x) = 4$	$u'(x) = 0$
$v(x) = x^2 + 3$	$v'(x) = 2x$

Bei dieser Funktion könnte theoretisch auch die Kettenregel angewendet werden (denn es gilt auch $f(x) = 4 \cdot (x^2 + 3)^{-1}$). Die Aufgabe bezieht sich aber auf die Quotientenregel.

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2} = \frac{0 \cdot (x^2+3) \quad - 4 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-8x}{(x^2+3)^2}$$

b) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+4}$

$u(x) = 2x - 5$ $u'(x) = 2$

$v(x) = x^2 + 4$ $v'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2} = \frac{2 \cdot (x^2+4) \quad -2x \cdot (2x-5)}{(x^2+4)^2} = \frac{-2x^2+10x+8}{(x^2+4)^2}$$

c) $f(x) = \frac{3x}{\sin(x)}$

$u(x) = 3x$ $u'(x) = 3$

$v(x) = \sin(x)$ $v'(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2} = \frac{3 \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot 3x}{(\sin(x))^2} = \frac{3 \cdot \sin(x) - 3x \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

d) $f(x) = \frac{4x}{e^x}$

Bei dieser Funktion könnte theoretisch auch wieder die Kettenregel angewendet werden (denn es gilt auch $f(x) = 4x \cdot e^{-x}$). Weiter mit der Quotientenregel:

$u(x) = 4x$ $u'(x) = 4$

$v(x) = e^x$ $v'(x) = e^x$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2} = \frac{4 \cdot e^x - e^x \cdot 4x}{(e^x)^2} = \frac{4 \cdot e^x - e^x \cdot 4x}{e^{2x}} = \frac{(4-4x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{4-4x}{e^x}$$

e) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+4x+2}$

$u(x) = x^2 - 3$ $u'(x) = 2x$

$v(x) = x^2 + 4x + 2$ $v'(x) = 2x + 4$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2} = \frac{2x \cdot (x^2+4x+2) \quad -(2x+4) \cdot (x^2-3)}{(x^2+4x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3+8x^2+4x-(2x^3-6x+4x^2-12)}{(x^2+4x+2)^2} = \frac{4x^2+10x+12}{(x^2+4x+2)^2}$$