# Kreise und Kugeln

**Aufgabe 1**

a) K: $x^2 + (y - 2)^2 = 25$ ist im $\mathbb{R}^2$ ein Kreis. Wie lautet der Mittelpunkt und der Radius?

b) Wie lautet der Mittelpunkt und der Radius des Kreises K: $x^2 -8x + y^2 = 9$ ?

Lösung:

a) M(0; 2) ist der Mittelpunkt und der Radius ist r = 5.

b) Hier benötigen wir eine quadratische Ergänzung:

$$x^2 - 8x + (8/2)^2 - (8/2)^2 + y^2 = 9$$

$$(x - 4)^2 - 16 + y^2 = 9 \mid + 16$$

$$(x - 4)^2 + y^2 = 25$$

Damit ist M(4; 0) der Mittelpunkt und r = 5 der Radius.

**Aufgabe 2**

Gegeben ist die Gleichung der Kugel K: $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 100$.

a) Es soll der Schnittpunkt der Kugel mit der Geraden

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bestimmt werden.

b) Wie lautet die Gleichung der Ebene E, die K im Punkt Q(10; 0; 0) tangiert?

Lösung:

a) Aus der Gleichung für g folgt:

$$x = -2 + t$$

$$y = 5$$

$$z = -6 + t$$

Dies setzen wir in die Gleichung für K ein:

$$(t - 2)^2 + (5 + 1)^2 + (t - 6 - 4)^2 = 100$$

$$t^2 - 4t + 4 + 36 + t^2 - 20t + 100 = 100$$

$$2t^2 - 24t + 140 = 100 \mid - 100$$

$$2t^2 - 24t + 40 = 0 \mid : 2$$

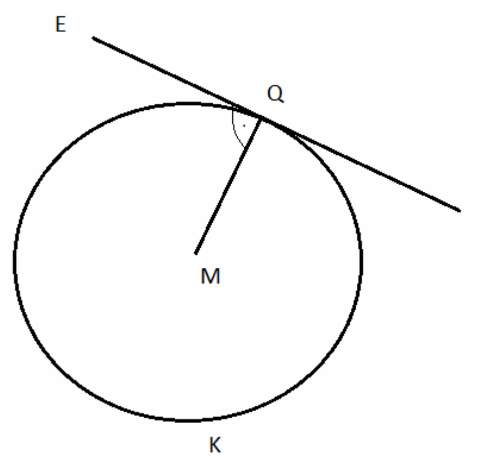
$$t^2 - 12t + 20 = 0$$

Mit der p-q-Formel ergibt sich $t_1 = 6 + 4 = 10$, $t_2 = 6 - 4 = 2$. Wir haben somit zwei Schnittpunkte. Es hätte sich auch nur eine Lösung (falls die Gerade den Kreis berührt) ergeben können, oder auch keine (wenn die Gerade an der Kugel vorbei läuft, d.h. wenn der Abstand der Gerade zum Kugelmittelpunkt größer als der Radius der Kugel wäre). Setzen wir die beiden Lösungen für t in die Geradengleichung ein, so ergeben sich die beiden Schnittpunkt:

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1(8; 5, 4)$$

$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow S_2(0; 5, -4)$$

b) Der Vektor vom Mittelpunkt zum Berührpunkt ist senkrecht zur Tangentialebene (die nächste Grafik zeigt ein Schnitt durch die Kugel durch den Mittelpunkt M der Kugel und den Tangentialpunkt Q).




Damit kann man diesen Vektor als Normalenvektor der Ebenen verwenden:

$$\vec{n} = \overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich eine Darstellung der Tangentialebene in Normalenform durch:

$$E:\ (\vec{x} - \overrightarrow{OQ}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$E:\ \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$