Länge eines Vektors und Abstand von zwei Punkten

Aufgabe 1

Bestimme die Länge des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren

Aufgabe 2

Es sind die Eckpunkte A(1; 2), B(4; 3) und C(3; 5) eines Dreiecks gegeben und es soll der Winkel α (an der Ecke A) bestimmt werden.

Lineare Unabhängigkeit

Aufgabe 3

Sind die folgenden Vektoren linear abhängig oder unabhängig?

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) Lässt sich der Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen?

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Sind diese Vektoren linear abhängig?

Gauß-Algorithmus

Aufgabe 5

Löse das folgende Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\begin{aligned} (1)&\quad -2r + s + t = 0 \\ (2)&\quad 2r + 3s - t = 0 \\ (3)&\quad -r + 2s + 2t = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Löse das folgende Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\begin{aligned} (1)&\quad 2x - 3y + 2z = 2 \\ (2)&\quad x - y + 3z = 8 \\ (3)&\quad -3x + 2y + 2z = 7 \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Wie muss a gewählt werden, damit das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist?

$$\begin{aligned} (1)&\quad 2x - y = 8 \\ (2)&\quad 3x + ay = 4 \end{aligned}$$

Lösungen:

1) Die Länge beträgt: $|\vec{x}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$.

2) Man benötigt die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ oder $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{CA}$. Würde man den Winkel zwischen $\overrightarrow{AB}$ (der von A „weg zeigt“) und $\overrightarrow{CA}$ (der zu A „hin zeigt“) berechnen, so würde sich 180° - α ergeben.

Es gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

analog ergibt sich $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Damit ist

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{9}{\sqrt{10 \cdot 13}}$$

und $\alpha \approx 37{,}87°$.

3) a) Wir können prüfen, ob das Gleichungssystem

$$r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

nur die Lösung r = s = t = 0 hat, dann wären die Vektoren linear unabhängig:

(1) $4r + s - 3t = 0$
(2) $2r + 5s + 3t = 0$
(3) $3r + s - 2t = 0$

Wir eliminieren s und addieren das (-5)-fache von (1) und zu (2) und danach das (-1)-fache von (1) und zu (3):

$(-5)\cdot(1) + (2)$: $-18r + 18t = 0$
$(-1)\cdot(1) + (3)$: $-r + t = 0$

Die beiden Gleichungen oben sind abhängig, da sie Vielfache sind. Wenn wir das 18-fache der unteren Gleichung von der oberen subtrahieren, ergibt sich 0 = 0. Damit ergeben sich unendlich viele Lösungen und die Vektoren sind linear abhängig bzw. komplanar.

Alternativ kann auch geprüft werden, ob sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen lässt, z.B. ob:

$$r\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Hier muss aufgepasst werden, dass die beiden Vektoren auf der linken Seite oben nicht Vielfache sind, denn dann sind die Vektoren automatisch abhängig. Hier ergibt sich:

(1) $4r + s = -3$
(2) $2r + 5s = 3$
(3) $3r + s = -2$

Wir haben nur 2 Unbekannte, aber 3 Gleichungen. Wir wählen (1) und (3) aus und lösen diese nach r und s auf. Wenn diese beiden Gleichungen aber Vielfache sind, müssten wir Z.B. die (1) und die (2) wählen. Dies ist aber nicht der Fall.

(1) – (3): $r = -1$. Dies in (1) eingesetzt ergibt $s = 1$.

Nun machen wir die Probe mit der nicht verwendeten Gleichung und setzen in (2) ein:
-2 + 5 = 3. Diese Gleichung ist erfüllt, womit die Vektoren abhängig sind. Bei einem Widerspruch wären diese unabhängig gewesen. Es gilt:

$$-\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

b) Wir prüfen, ob die Vektoren Vielfache sind:

$$\begin{pmatrix}8\\2\\10\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}$$

$$8 = 4t$$
$$2 = t$$
$$10 = 5t$$

Alle drei Gleichungen ergeben t = 2, womit die Vektoren abhängig und damit kollinear sind. Hätten sich mindestens zwei verschiedene t ergeben, wären diese linear unabhängig.

c) Wir müssen prüfen, ob es reelle Zahlen s und t gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gilt. Es ergeben sich drei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

(1) $5 = s + 3t$
(2) $-2 = 2s - 6t$
(3) $1 = -s + 3t$

Wir wählen die Gleichungen (1) und (3) aus und lösen diese nach s und t auf. Addition von (1) und (3) ergibt $6 = 6t$, womit $t = 1$ wäre. Setzt man $t = 1$ in (1) ein, so ergibt sich $5 = s + 3$, womit $s = 2$ wäre. Nun müssen wir die nicht verwendete Gleichung (2) prüfen und setzen unsere Lösungen für s und t in diese ein: $-2 = 2 \cdot 2 - 6$. Damit ist die Gleichung (2) erfüllt und der Vektor $\vec{v}$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4) Wir können wieder prüfen, ob die Gleichung

$$r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur eine Lösung (hier wären die Vektoren linear unabhängig) oder unendlich viele hat. Also ergeben sich drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

(1) $-2r + s + 5t = 0$
(2) $2r + 6s + 2t = 0$
(3) $-r - 4s - 2t = 0$

(1) + (2) ergibt:
(I) $7s + 7t = 0$

(2) + 2·(3) ergibt:
(II) $-2s - 2t = 0$

2·(I) + 7·(II) ergibt $0 = 0$. Somit sind die Vektoren abhängig und es gibt unendlich viele Lösungen, denn die beiden Gleichung (I) und (II) sind Vielfache voneinander.

Bemerkungen:

B1) Suchen wir weiter Lösungen, so folgt aus (I) bzw. (II) „nur“, dass s = -t ist. Setzen wir dies z.B. in (3) ein, ergibt sich -r + 4t - 2t = 0, womit r = 2t ist. Für jedes t aus den reellen Zahlen gibt es somit eine Lösung. Für t = 1 wäre s = -1 und r = 2. Es gilt damit $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ und somit können wir in unserem Fall der Abhängigkeit einen Vektor als Linearkombination der anderen darstellen, z.B. $\vec{b} = 2\vec{a} + \vec{c}$ oder $\vec{a} = 1/2 \cdot \vec{b} - 1/2 \cdot \vec{c}$.

B2) Wir hätten auch wieder prüfen können, ob es (reelle) Zahlen u und v gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gilt. Falls dies so ist, dann sind die Vektoren linear abhängig. Dies ist allgemein einfacher, da nur zwei Unbekannte vorhanden sind. Oben gilt u = 1/2 und v = -1/2, was wir bereits aus B1) wissen. Bei dieser Art der Prüfung der linearen Abhängigkeit müssen wir aber wieder aufpassen, dass die beiden Vektoren auf der rechten Seite nicht kollinear (d.h. Vielfache) sind, denn wenn diese Vielfache sind, dann sind die drei Vektoren automatisch abhängig. Hier könnten wir dann aber allgemein keine u und v finden, obwohl diese abhängig sind.

5) Wir lösen das Gleichungssystem einmal mit und einmal ohne Gauß-Tableau:

$$\begin{array}{ll} (1) & -2r + s + t = 0 \\ (2) & 2r + 3s - t = 0 \\ (3) & -r + 2s + 2t = 0 \end{array}$$

Wir addieren dass 2-fache der dritten zur zweiten Gleichung und das (-2)-fache der dritten zur ersten Gleichung und eliminieren damit r:

$$\begin{array}{ll} 2\cdot(3): & -2r + 4s + 4t = 0 \\ \underline{(2):} & \underline{2r + 3s - t = 0 \quad (+)} \\ (I) & \phantom{-2r+{}} 7s + 3t = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} -2\cdot(3): & 2r - 4s - 4t = 0 \\ \underline{(1):} & \underline{-2r + s + t = 0 \quad (+)} \\ (II) & \phantom{-2r+{}} -3s - 3t = 0 \end{array}$$

Nun können wir die beiden Gleichungen (I) und (II) addieren, womit sich 4s = 0 und somit s = 0 ergibt. Es gibt damit eine Lösung. Setzten wir s = 0 in (I) ein, ergibt sich 3t = 0 und damit ist auch t = 0. Nun können wir s = 0 und t = 0 in z.B. (1) einsetzen und erhalten -2r = 0 womit auch r = 0 ist. Ein Gleichungssystem - wie das obige - mit nur Nullen auf einer Seite, heißt homogenes Gleichungssystem und dieses hat entweder unendlich viele Lösungen oder nur eine: r = s = t = 0, wie in unserem Fall.

Wir Lösen das Gleichungssystem nochmals mit dem Gauß-Tableau (wobei dies im Prinzip dasselbe ist):

r	s	t	rechte Seite
-2	1	1	0
2	3	-1	0
-1	2	2	0

Die rechte Seite können wir hier auch weglassen, da sie nur aus Nullen besteht. Wir vertauschen nun die erste mit der dritten Zeile, wobei wir die dritte Zeile noch mit (-1) multiplizieren. Damit steht oben rechts eine 1, was das Eliminieren von r in den Zeilen darunter vereinfacht.

r	s	t
1	-2	-2
2	3	-1
-2	1	1

Nun addiert man Vielfache der ersten Zeile zu den anderen beiden Zeilen, so dass unterhalb der ersten Zeile in der ersten Spalte Nullen stehen.

Wir addieren das (-2)-fache der ersten Zeile zur zweiten und das 2-fache der ersten Zeile zur dritten Zeile:

r	s	t
1	-2	-2
0	7	3
0	-3	-3

Addieren wir nun das 3-fache der zweiten Zeile zum 7-fachen der dritten Zeile, so ergibt sich das folgende Tableau (wir hätten natürlich auch t eliminieren können):

r	s	t
1	-2	-2
0	7	3
0	0	-12

Damit ergab sich:

$$\begin{aligned} r - 2s - 2t &= 0 \\ 7s + 3t &= 0 \\ -12t &= 0 \end{aligned}$$

Dividieren wir die letzte Zeile durch (-12), ergibt sich $t = 0$. Das kann in die vorletzte Zeile eingesetzt werden, womit sich $s = 0$ ergibt und dann mit dem Einsetzen von $t = 0$ und $s = 0$ in die ersten Zeile auch $r = 0$ folgt.

6) Wir tragen die Koeffizienten des Gleichungssystems in das Tableau ein, wobei wir die ersten beiden Zeilen vertauschen, was in diesem Fall das eliminieren von x vereinfacht (hier muss dann nur die erste Zeile vervielfacht und zu einer anderen addiert werden, denn vor x steht hier der Faktor 1):

x	y	z	rechte Seite
1	-1	3	8
2	-3	2	2
-3	2	2	7

Nun können wir das (-2)-fache der ersten Zeile zur zweiten Zeile und das 3-fache der ersten Zeile zur dritten Zeile addieren und erhalten unter der ersten Zeile in der Spalte für x nur Nullen:

x	y	z	rechte Seite
1	-1	3	8
0	-1	-4	-14
0	-1	11	31

Jetzt addieren wir das (-1)-fache der zweiten Zeile zur dritten, wobei wir y in der dritten Zeile eliminieren:

x	y	z	rechte Seite
1	-1	3	8
0	-1	-4	-14
0	0	15	45

Somit wäre $15z = 45$ und $z = 3$. Setzen wir $z = 3$ in die zweite Zeile des umgeformten Gleichungssystem ein, so ergibt sich $-y - 4\cdot3 = -14$, womit $y = 2$ ist. Nun können wir die Lösungen für z und y in die ersten Zeile einsetzen und erhalten $x - 2 + 3\cdot3 = 8$, womit $x = 1$ ist.

Somit haben wir die Lösung $\mathbb{L} = \{(1; 2; 3)\}$ gefunden.

Bemerkung:
Hätte sich als letztes Tableau

x	y	z	rechte Seite
1	-1	3	8
0	-1	-4	-14
0	0	0	45

ergeben, so gäbe es keine Lösung ($\mathbb{L} = \{\}$).

Hätte sich als letztes Tableau dagegen

x	y	z	rechte Seite
1	-1	3	8
0	-1	-4	-14
0	0	0	0

ergeben, so gäbe es unendlich viele Lösungen. Man könnte z auf einen Parameter z = t setzen und dann in die zweite Zeile einsetzen: -y - 4t = -14. Damit wäre y = 14 - 4t. Dies in die erste Gleichung eingesetzt (und z = t) liefert x - (14 - 4t) + 3t = 8, somit x = 22 - 7t ist und wir haben die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(22 - 7t; 14 - 4t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ gefunden. Grafisch gesehen ist dies eine Gerade im Raum.

7) Wir übertragen das Gleichungssystem in das Tableau:

x	y	rechte Seite
2	-1	8
3	a	4

Wir addieren das (-3)-fache der ersten Zeile zum 2-fachen der zweiten Zeile und schreiben das Ergebnis in die zweite Zeile:

x	y	rechte Seite
2	-1	8
0	3+2a	-16

Damit ist (3+2a)y = -16. Wenn $3 + 2a \neq 0$ ist, d.h. wenn $a \neq -3/2$ ist, dann gibt es genau eine Lösung. Wenn a = -3/2 wäre, dann würde sich 0 = -16 ergeben, womit wir keine Lösung hätten.

Ohne Gauß-Tableau ergibt sich natürlich dasselbe:

$$\begin{array}{ll} (1) & 2x - y = 8 \\ (2) & 3x + ay = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (-3)\cdot(1): & -6x + 3y = -24 \\ \underline{2\cdot(2): } & \underline{\;\;6x + 2ay = 8 \quad (+)} \\ & 3y + 2ay = -16 \end{array}$$

Also: (3 + 2a)y = -16

Wir haben teils mit und ohne Gauß-Tableau die Lösung bestimmt, da teils im Unterricht mit und teils ohne Gauß-Tableau gerechnet wird, wobei letztendlich kein Unterschied besteht. Beim Gauß-Tableau werden nur die Koeffizienten verwendet und in der Regel wird hier zunächst die Variable in der ersten Spalte eliminiert, wobei wir theoretisch auch, wenn es einfacher wäre, Spalten vertauschen und dann zunächst eine andere Variable eliminieren könnten. Bei der Angabe der Lösung muss dann aber aufgepasst werden, damit nicht die Lösungskomponenten vertauscht werden. Wir können natürlich auch immer Zeilen vertauschen, was keinerlei Auswirkungen auf die Lösung hat.