Aufgabe 1

Es soll geprüft werden, ob der Punkt P(1; -2; 4) auf der Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liegt.

Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich drei Gleichungen:

$$1 = 2 - t$$

$$-2 = 1 - 3t$$

$$4 = -2 + t$$

Die erste Gleichung ergibt t = 1, die zweite t = 1 und die dritte t = 6. Somit liegt der Punkt P nicht auf der Geraden g (es muss sich bei jeder Gleichung derselbe Wert für t ergeben).

Lagebeziehung zwischen Geraden, Schnittpunkt, Schnittwinkel

Aufgabe 2

Wie ist die Lagebeziehung zwischen den beiden Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ ?$$

Lösung:

Zunächst sieht man auf die beiden Richtungsvektoren. Hier ist zu erkennen, dass diese Vielfache voneinander sind:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit sind die beiden Geraden parallel oder sogar identisch. Nun prüfen wir, ob diese auch identisch sind. Wenn diese identisch sind, dann müssen alle Punkte, die auf der einen Geraden liegen, auch auf der anderen liegen. Wir prüfen nun, ob der Stützvektor der Geraden h ein Ortsvektor eines Punktes von g ist:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich, in Analogie zur Punktprobe, t = -2. Somit sind die beiden Geraden identisch.

Aufgabe 3

Wie ist die Lagebeziehung zwischen den beiden Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ?$$

Lösung:

Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen, womit die beiden Geraden weder parallel noch identisch sein können. Wir setzen beide Gleichungen gleich, womit sich 3 Gleichungen für zwei Unbekannte ergeben:

(1) $t = 1 + s$

(2) $1 + 2t = 6 - s$

(3) $1 + t = 1 + 2s$

Nun kann man zwei Gleichungen auswählen, diese nach s und t auflösen und dann prüfen, ob auch die nicht ausgewählte Gleichung erfüllt ist. Wir wählen die Gleichungen (1) und (2) aus und addieren diese, um s zu eliminieren:

$$1 + 3t = 7$$

Somit ist t = 2. Eingesetzt in (1) ergibt sich s = 1. Nun überprüfen wir, ob die dritte Gleichung, die wir bisher nicht verwendet haben, erfüllt ist:

$$1 + 2 = 1 + 2$$

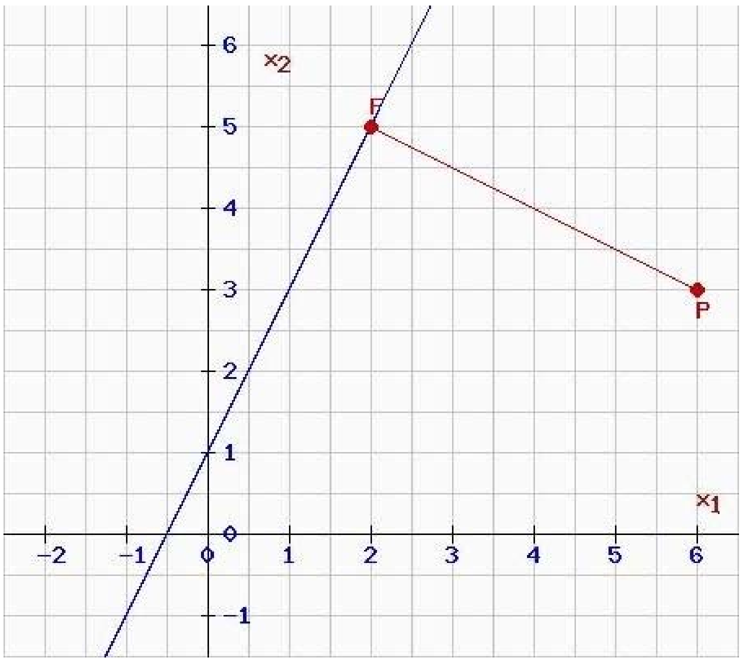
Diese ist somit erfüllt, womit sich die beiden Geraden schneiden. Wenn der Schnittpunkt zu bestimmen ist, dann kann man t = 2 in die Gleichung für g oder s = 1 in die Gleichung für h einsetzen (was wir nun tun) und man erhält

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$, womit S(2; 5; 3) der Schnittpunkt ist.

Abstand Punkt Gerade

Aufgabe 4

Gesucht ist der Abstand des Punktes P(6; 3) von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Lösung:

Mit

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \text{ bzw. } \left[\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

erhalten wir

$$-6 + (-2)\cdot 2 + t + 2t\cdot 2 = 0 \text{ bzw. } -10 + 5t = 0$$

und somit ist t = 2. Eingesetzt in die Gleichung von g ergibt

$$\text{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ bzw. F(2; 5).}$$

Nun bestimmen wir den Vektor von P zu F:

$$\overrightarrow{\text{PF}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Abstand $\left|\overrightarrow{\text{PF}}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$.

Mit $\overrightarrow{\text{PF}}$ könnte man auch den Punkt P an der Gerade g spiegeln. Der gespiegelte Punkt P' ergibt sich über:

$$\overrightarrow{\text{OP'}} = \overrightarrow{\text{OP}} + 2 \cdot \overrightarrow{\text{PF}} = \overrightarrow{\text{OF}} + \overrightarrow{\text{PF}}$$

Spurpunkte

Aufgabe 5

Bestimme die Spurpunkte der Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Der Schnittpunkt von g mit der x-y-Ebene ergibt sich, wenn man z = 0 setzt, also wenn

$$0 = 1 + t$$

ist, womit t = -1 ist. Also ergibt sich der Ortsvektor des ersten Spurpunktes S_{xy}:

$$\overrightarrow{\text{OS}_{xy}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ womit } S_{xy}(2; 1; 0) \text{ ist.}$$

Analog erhält man die anderen beiden Spurpunkte. Setzt man $y = 0$, so erhält man den Schnittpunkt mit der x-z-Ebene $S_{xz}(3;\ 0;\ -1)$ und setzt man $x = 0$, so erhält man den Schnittpunkt mit der y-z-Ebene $S_{yz}(0;\ 3;\ 2)$.